Conforme Abbildung

eines

von concentrischen, gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis.

Gekrönte Preisschrift

der

Hohen philosophischen Fakultät (II. Section)
der Königl. Ludwig-Maximilians-Universität München.

Derselben als

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt am 16. Februar 1897

von

Johann Goettler
aus Haimhausen.

München 1897.
Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Conforme Abbildung

eines

von concentrischen, gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis.

Gekrönte Preisschrift

der

Hohen philosophischen Fakultät (II. Section)

der Königl. Ludwig-Maximilians-Universität München.

Derselben als

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt am 16. Februar 1897

von

Johann Goettler

aus Haimhausen.

München 1897.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546007_0070

INHALTSANGABE.

I. Abschnitt.

Seite

Conforme Abbildung eines von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkt begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene und den Einheitskreis 1

§ 1. Zur Theorie der conformen Abbildung 1

§ 2. Verschiedene Arten von Hyperbelpolygonen. Relationen zwischen den Winkeln derselben 8

§ 3. Abbildung des Innern eines geschlossenen Hyperbelpolygons auf die Halbebene 12

§ 4. Abbildung des Aeussern eines geschlossenen Hyperbelpolygons auf die Halbebene 18

§ 5. Abbildung von Hyperbelpolygonen, welche sich ins Unendliche erstrecken 21

§ 6. Uebergang von der positiven Halbebene $Y=0$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene 24

§ 7. Abbildung von symmetrischen und regulären Hyperbelpolygonen auf den Einheitskreis 25

§ 8. Spezielle Fälle, welche vollständig durchführbar sind 28

§ 9. Abbildung von Hyperbelpolygonen, welche Ecken mit Winkeln 2π oder auch Spitzen (Winkel von 0^0) enthalten 32

§ 10. Zusammenstellung der wichtigsten Abbildungen von Flächenstücken, die von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkt begrenzt werden 39

II. Abschnitt.

Conforme Abbildung eines von gewissen Kurven n^{ter} und $2n^{ter}$ Ordnung begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene und den Einheitskreis 42

§ 1. Abbildung eines von regulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung mit gemeinsamen Mittelpunkt begrenzten Flächenstückes 42

§ 2. Abbildung eines von confocalen Parabeln n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes 58

c) der Fall eines Polygons, welches von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt ist.[1])

Spezielle Fälle der Abbildung von Flächenstücken, die von gewissen Kurven begrenzt werden, sind allerdings in grösserer Anzahl durchgeführt[2]); diese aber sind entweder aus oben genannten allgemeinen Problemen durch Spezialisierung hervorgegangen oder mehr zufälliger Entdeckung und entbehren so des fundamentalen Charakters.

Die angeführten drei Fundamentalfälle lassen sich in eleganter Weise verallgemeinern. Die einfachsten Fälle dieser Verallgemeinerung führen auf die Abbildung von Flächenstücken, deren Begrenzung aus Bögen concentrischer regulärer Hyperbeln, confocaler Parabeln, concentrischer Lemniskaten oder auch cardioidischer Kurven mit gemeinsamen Schnittpunkt der Symmetralachsen besteht.

Im Folgenden sei immer: $z = r \cdot e^{i\varphi}$ die Ebene des Flächenstückes, welches auf die Halbebene $Y > 0$ der complexen Ebene $Z = R \cdot e^{i\Phi}$ oder auch auf das Innere des Einheitskreises der Ebene $\zeta = \varrho \cdot e^{i\psi}$ abzubilden ist. Ferner sei $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$; die Grenzkurven des gegebenen Flächenstückes seien in den Variabeln z und z_1, also in der Form $f(z, z_1) = 0$ gegeben. A und A_1, a und a_1 u. s. w. seien conjugiert-complexe Zahlen. $\mathfrak{P}(Z - C)$ bedeute eine Potenzreihe von der Form:

$$\mathfrak{P}(Z - C) = \gamma_0 + \gamma_1(Z - C) + \gamma_2(Z - C)^2 + \ldots .$$

I.

Es sei $\varphi(z)$ eine vorgegebene Funktion von z, $\varphi_1(Z_1)$ die conjugierte Funktion.[3]) In der zEbene sei ein Flächenstück, dessen Grenzlinien Bögen von Kurven sind, welche durch die Gleichung

$$f(z, z_1) \equiv \alpha\varphi(z) + \alpha_1\varphi(z_1) + \beta = 0 \qquad (1)$$

dargestellt werden. α, α_1 und β variieren von Kurve zu Kurve.

---

[1]) F. Lindemann: „Ueber die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird." Sitzungsbericht der k. b. Akademie der Wissensch. 1895, Bd. XXV, Heft II.

[2]) Man vergleiche: F. Lindemann l. c. — Holzmüller: „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften." — Hentschel: „Ueber einige Abbildungsaufgaben." Inaug.-Diss. — Siebeck; Crelle Journal Bd. 53; u. a. m.

[3]) An dieser Stelle müssen wir uns darauf beschränken, die Gedanken dieses Paragraphen kurz zu entwickeln, da eine exakte Behandlung dieser allgemeinen Fälle den Rahmen vorliegender Abhandlung übersteigt.

Zufolge Gleichung (1) ist:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = -\frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot dz_1$$

und da $\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha \cdot \varphi'(z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \alpha_1 \cdot \varphi_1'(z_1)$ ist, so ist auch:

$$\alpha \cdot \varphi'(z) \cdot \frac{dz}{dZ} = -\alpha_1 \cdot \varphi_1'(z_1) \cdot \frac{dz_1}{dZ}.$$

Diese Funktion ist für reelle Werte von Z, solange z und z_1 der Gleichung (1) genügen, rein imaginär; denn sie wechselt bei Vertauschung von $+i$ mit $-i$ lediglich ihr Vorzeichen.

Um eine Funktion zu erhalten, welche von den variierenden Constanten α und α_1 unabhängig ist, bilden wir:

$$F \equiv \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z) \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi_1'(z_1) \cdot \frac{dz_1}{dZ}\right)\right].$$

Die Funktion F ändert sich mithin nicht bei Vertauschung von $+i$ mit $-i$, solange Z reell ist und z mit z_1 einer Gleichung von der Form (1) Genüge leisten d. h. sie überträgt den Rand des gegebenen Flächenstückes auf die XAchse und vermittelt also, wenn in ihrer Abhängigkeit von Z richtig bestimmt, die Abbildung eines Polygons, dessen Grenzlinien Kurven von der Form der Gleichung (1) sind, auf die Halbebene $Y > 0$.

Die Funktion $\varphi(z)$ ist indes einer Bedingung unterworfen. Damit nämlich die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z) \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \cdot z' + \frac{z''}{z'}$$

eindeutig ist, muss $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ eine im Innern des abzubildenden Flächenstückes eindeutige Funktion sein. $\left(\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz};\ z' = \frac{dz}{dZ}\right)$

Unstetigkeiten entstehen im allgemeinen an den Ecken der Begrenzung (resp. deren Bildern) und in einzelnen durch die Funktion $\varphi(z)$ gegebenen Punkten. Jene Unstetigkeiten der Funktion F, welche durch diejenigen Ecken hervorgerufen werden, die nicht in einem der durch die Beschaffenheit der Funktion $\varphi(z)$ bestimmten Unstetigkeitsstellen liegen, lassen sich sofort heben.

Setzt man nämlich $\varphi(z) = t$, mithin $\varphi_1(z_1) = t_1$, so ist:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{d}{dZ}\left(\log\frac{dt}{dZ}\right) \qquad (2)$$

Jede Grenzkurve $f = 0$ des gegebenen Polygons geht in eine gerade Linie $\alpha t + \alpha_1 t_1 + \beta = 0$ der tEbene über; gemäss der Conformität der Abbildung $\varphi(z) = t$ schliessen zwei Kurven $f = 0$ denselben Winkel $\alpha \cdot \pi$ ein, wie ihre geradlinigen Bilder. Da aber der Winkel $\alpha \cdot \pi$ in der tEbene von zwei Geraden eingeschlossen wird, so ist nach dem bekannten „Schwarz"'schen Theorem die allgemeinste Funktion, welche diesen Winkel $\alpha \cdot \pi$ der tEbene in einen gestreckten Winkel der ZEbene überführt, wenn $t = b$ der Scheitel des Winkels und $Z = A$ dessen Bild ist, in der Nähe dieser Stelle dargestellt durch:

$$t - b = (Z - A)^{\alpha} \cdot \mathfrak{P}(Z - A).$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dt}{dZ}\right)\right] = \frac{\alpha - 1}{Z - A} + \mathfrak{P}(Z - A)$$

Mithin ist für diese singuläre Stelle auch:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{\alpha - 1}{Z - A} + P(Z - A).$$

Sind also mEcken im Endlichen ausserhalb den durch die Natur der Funktion $\varphi(z)$ bestimmten Unstetigkeitsstellen vorhanden {zugehörige Winkel $\alpha_\mu \cdot \pi$; die Bilder der zugehörigen Scheitelpunkte seien $Z = A_\mu$; $\mu = 1, 2 \ldots . m$}, so ist die Funktion:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} \qquad (3)$$

auch an den betrachteten Ecken eindeutig und stetig.

Die Unstetigkeiten, welche an den durch die Funktion $\varphi(z)$ involvierten singulären Punkten entweder dadurch entstehen, dass diese Punkte im Innern oder am Rande des abzubildenden Flächenstückes liegen, oder dadurch, dass in diesen Punkten Polygonsecken liegen, sind für jede spezielle Funktion $\varphi(z)$ besonders zu untersuchen.

Es zeigt sich, dass die Funktion:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - R(Z) \qquad (4)$$

wenn $R(Z)$ eine passend gewählte rationale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt, innerhalb des ganzen abzubildenden

Gebietes holomorph und somit nach einem Hauptsatze der Funktionentheorie constant ist. Ihr constanter Wert ist durch einen speziellen Punkt Z (am einfachsten für $Z = \infty$) zu bestimmen; findet man diesen Wert gleich c, so besteht für das in Betracht kommende Gebiet die Gleichung:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] = \sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + R(Z) + c. \qquad (4a)$$

Durch Integration ergibt sich hieraus die gesuchte Abbildung, wodurch die gestellte Aufgabe sodann prinzipiell erledigt ist.

Die Bestimmung der Funktion $R(Z)$ wird an den in dieser Abhandlung durchgeführten Beispielen klargelegt werden.

II.

Die Gleichung der Grenzkurven des gegebenen Flächenstückes sei von der Form:

$$f \equiv \varphi(z)\cdot\varphi_1(z_1) + \alpha\,\varphi(z) + \alpha_1\varphi_1(z_1) + \beta = 0. \qquad (5)$$

Es ist wiederum

$$\frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz = -\frac{\partial f}{\partial z_1}\cdot dz_1$$

und da

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \varphi'(z)\cdot\{\varphi_1(z_1) + \alpha\},\ \text{ebenso}\ \frac{\partial f}{\partial z_1} = \varphi_1'(z_1)\ \{\varphi(z) + \alpha_1\},$$

so ist

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z) + \alpha_1}\cdot\frac{dz}{dZ} = -\frac{\varphi_1'(z_1)}{\varphi_1(z_1) + \alpha}\cdot\frac{dz_1}{dZ}.$$

Um eine von den Constanten α und α_1 unabhängige Funktion zu erhalten, bilden wir die bekannte, für die Abbildung von Kreisbogenpolygonen charakteristische Schwarz'sche Funktion:

$$\left\{\varphi, Z\right\} = \frac{d^2}{dZ^2}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]\right\}^2;$$

dann ist

$$\{\varphi, Z\} = \{\varphi_1, Z\}.$$

Die Funktion $\{\varphi, Z\}$ bleibt also für reelle Z reell, solange φ und φ_1 der Gleichung (5) genügen, d. h. der Punkt Z bewegt sich auf der X Achse, wenn z sich auf einer Kurve von der Form (5) bewegt. Es ist sofort klar, dass diese Funktion, wenn in ihrer Abhängigkeit

von Z gehörig bestimmt, die Abbildung eines Flächenstückes vermittelt, welches von Kurven von der Form der Gleichung (5) begrenzt wird.

Auch hier ist die Funktion $\varphi(z)$ einer Bedingung unterworfen. Damit nämlich die Funktion $\{\varphi, Z\}$ eindeutig ist, ist notwendig und hinreichend, dass $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ innerhalb des abzubildenden Gebietes eine eindeutige Funktion ist.

Die Unstetigkeiten, welche durch eine, nicht in einem der speziellen durch die Natur der Funktion $\varphi(z)$ involvierten singulären Punkte liegende Polygonsecke hervorgerufen werden, lassen sich sofort beseitigen.

Macht man die Transformation $\varphi(z) = t$ und somit $\varphi_1(z_1) = t_1$, so ist

$$\{\varphi, Z\} = \{t, Z\}. \tag{6}$$

Nun wird ein Winkel $\alpha \cdot \pi$, welcher in der z Ebene von zwei Kurven f_1 und f_2 gebildet wird, in der t Ebene von zwei Kurven der Form $t \cdot t_1 + \alpha t + \alpha_1 t_1 + \beta = 0$ d. h. von von zwei Kreisen begrenzt.

Jede Funktion, welche den Winkel $\alpha \cdot \pi$ der t Ebene in einen gestreckten der Z Ebene verwandelt, ist aber nach dem Schwarz'schen Satz, wenn der Punkt $Z = A$ das Bild des Scheitels $t = b$ ist, in der Nähe von A dargestellt durch

$$t - b = (Z - A)^{\alpha} \cdot P(Z - A).$$

Hieraus ergibt sich leicht:

$$\left\{\varphi, Z\right\} = \left\{t, Z\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha^2}{(Z-A)^2} + \frac{a}{Z-A}$$

wo a eine Konstante bezeichnet.

Sind m derartige Ecken vorhanden, deren Winkel $\alpha_\mu \cdot \pi$ und deren Bilder die Punkte $Z - A_\mu$ $(\mu = 1, 2 \ldots m)$ sind, so ist die Funktion

$$\left\{\varphi, Z\right\} - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{\frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{7}$$

auch an diesen Ecken eindeutig und stetig.

Die weiteren Unstetigkeiten sind für jede Funktion $\varphi(z)$ eigens zu untersuchen. Es zeigt sich, dass die Funktion

$$\left\{\varphi, Z\right\} - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{\frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right\} - R(Z), \tag{8}$$

wo $R(Z)$ eine passend gewählte rationale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt, im ganzen abzubildenden Gebiete holomorph und folglich konstant ist.

Ist die Funktion $R(Z)$ und der constante Wert der Funktion (8) bestimmt, so gilt im abzubildenden Gebiete die Gleichung:

$$\left\{\varphi,\ Z\right\} = \sum_{\mu=1}^{m}\left\{\frac{1-\alpha_\mu{}^2}{(Z-A_\mu)^2}+\frac{\alpha_\mu}{Z-A_\mu}\right\}+R(Z)+\text{const.} \quad (8a)$$

Die Abbildung ist auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt.

Im zweiten Abschnitte vorliegender Abhandlung werden wir hieher gehörige Beispiele durchführen.

III.

Die Gleichung der Grenzkurven des gegebenen Flächenstückes sei von der Form

$$f \equiv 2\varphi(z)\cdot\varphi_1(z_1)\cdot(a^2+b^2-2\lambda)+\{\varphi^2(z)+\varphi_1^2(z_1)\}\cdot(b^2-a^2) - 4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda) = 0\ ^1) \quad (9)$$

a und b seien bei allen Grenzkurven konstant, λ der variable Parameter.

Durch die Transformation $\varphi(z) = t$ erhält man in der tEbene das System confocaler Kegelschnitte.

$$2tt_1(a^2+b^2-2\lambda)+(t^2+t_1^2)(b^2-a^2)-4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)=0$$

Nach der bereits citierten Abhandlung des Herrn F. Lindemann wird die Abbildung eines derartigen Polygons der tEbene, wenn dasselbe im Endlichen geschlossen ist, vermittelt durch:

$$\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dt}{dZ}\right)\right\}-\frac{t}{t^2-e^2}\cdot\frac{dt}{dZ} = R(Z)$$

und wenn dasselbe sich ins Unendliche erstreckt, durch:

$$\left\{t,\ Z\right\}+\frac{3}{2}\cdot\frac{e^2}{(t^2-e^2)^2}\cdot\left(\frac{dt}{dZ}\right)^2 = R'(Z)$$

wobei $R(Z)$ und $R'(Z)$ rationale Funktionen von Z sind, welche für reelle Z reell bleiben, und $e^2 = a^2-b^2$ gesetzt ist.

Geht man von dem Polygon der tEbene wieder zurück auf

---

[1]) Conf. F. Lindemann l. c. — Die strenge Ableitung ist analog den dortigen Betrachtungen durchzuführen.

das gegebene Flächenstück der zEbene, so ergeben sich die Abbildungen

a. wenn das Polygon im Endlichen geschlossen ist,

$$\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right\} - \frac{\varphi(z)\cdot\varphi'(z)}{\{\varphi(z)\}^2 - e^2}\cdot\frac{dz}{dZ} = R(Z), \qquad (10)$$

b. wenn das Polygon sich ins Unendliche erstreckt,

$$\left\{\varphi, Z\right\} + \frac{3}{2}\cdot\frac{e^2\cdot\varphi'(z)^2}{[\{\varphi(z)\}^2 - e^2]^2}\cdot\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2 = R'(Z). \qquad (11)$$

Die Funktion $\varphi(z)$ hat indes einer Bedingung zu genügen, wenn obige Betrachtungen richtig sein sollen. Damit nämlich die linke Seite der Gleichung (10) eindeutig ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Funktionen $\frac{\varphi''}{\varphi'}$, $\varphi\cdot\varphi'$ und φ^2 im betrachteten Gebiete eindeutig sind; damit das Gleiche von der linken Seite der Gleichung (11) gilt, müssen die Funktionen $\frac{\varphi''}{\varphi'}$, φ'^2 und φ^2 eindeutig sein. Alle diese Bedingungen sind von selbst erfüllt, wie leicht zu sehen, wenn $\{\varphi(z)\}^2$ eine im betrachteten Gebiete eindeutige Funktion ist.

Ueber die nähere Ausführung dieses letzteren Problems verweisen wir auf die bezügliche Abhandlung des Urhebers dieser Theorie.

§ 2.

Verschiedene Arten von Hyperbelpolygonen; Relationen zwischen den Winkeln derselben.

„Hyperbelpolygon" sei der Kürze halber im Folgenden jedes Flächenstück genannt, welches von Bögen concentrischer, gleichseitiger Hyperbeln begrenzt wird, mag dasselbe im Endlichen geschlossen sein oder sich ins Unendliche erstrecken. Das gemeinsame Centrum der Grenzkurven sei der Punkt $z = 0$, eine Annahme, welche eine Coordinatentransformation voraussetzt, falls das gemeinsame Centrum ein anderer Punkt ist.

Wir unterscheiden in einem Hyperbelpolygon:

a. Ecken erster Art d. h. Polygonsecken, deren Scheitel weder im Punkte $z = 0$ noch im Punkte $z = \infty$ liegen. Eine solche Ecke kann gebildet werden von 2 Hyperbelästen (Fig. 1) oder von einem Hyperbelaste und einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden (degenerierten Hyperbel) (Fig. 3), oder auch von zwei zu-

sammenfallenden Hyperbeln (Fig. 26). Im letzteren Falle beträgt der betreffende Polygonswinkel 2π, das gewöhnliche Hyperbelpolygon hat einen Einschnitt von geradliniger oder hyperbolischer Form erhalten.

b. Ecken zweiter Art d. h. Polygonsecken, deren Scheitel der Punkt $z = 0$ ist. Solche Ecken werden von zwei Geraden (degenerirten Hyperbeln) gebildet (Fig. 4, 6); auch hier können Winkel von 2π auftreten, wobei die beiden Schenkel des Winkels eine Gerade bilden (Fig. 15).

c. Ecken dritter Art d. h. Polygonsecken, deren Scheitel der Punkt $z = \infty$ ist. Diese Ecken werden gebildet entweder von zwei wirklichen Hyperbeln (Fig. 7, 8) oder von einer wirklichen und einer degenerierten Hyperbel (Fig. 9) oder von zwei degenerierten Hyperbeln (Fig. 18). Der Winkel einer Ecke dritter Art ist gleich dem Winkel der beiden Asymptoten, welche zu den die Ecke bildenden Hyperbelästen gehören. Auch hier können Ecken auftreten, deren Winkel 2π beträgt; in einem speziellen Falle wird eine Ecke dritter Art mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ (oder $3\frac{\pi}{2}$) von einem Aste einer gleichseitigen Hyperbel gebildet.

Als Spitze eines Hyperbelpolygons bezeichnen wir jede Ecke mit dem Winkel Null. Derartige Ecken können nur im Punkte $z = \infty$ vorkommen und werden entweder von zwei wirklichen Hyperbeln (Fig. 19 bis 25) oder von einer wirklichen und einer degenerierten Hyperbel (Fig. 21 und 22) gebildet.

Es ist zu bemerken, dass der Punkt $z = 0$ oder $z = \infty$, — wenn an der Begrenzung eine durch den Nullpunkt gehende Gerade in der Weise teilnimmt, dass dieser Punkt zur Begrenzung gehört, — dieser Punkt nicht als ein gewöhnlicher Punkt des Randes, sondern als eine Polygonsecke mit dem Winkel π zu betrachten ist.

Je nach der Art der Polygonsecken und der Lage der Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ haben wir folgende Arten von Hyperbelpolygonen zu unterscheiden:

a. Polygone mit m Ecken erster Art, 0 Ecken zweiter Art, 0 Ecken dritter Art; je nach Lage des Punktes $z = 0$ im Innern oder im Aeussern des Polygons zwei Fälle; Fig. 1 und 2.

b. Polygone mit m Ecken erster, l Ecken zweiter und 0 Ecken dritter Art; je nach Anordnung der Ecken zwei Fälle;

Fig. 5 und 6; im ersteren Fall ist nur das Innere, im letzteren nur das Aeussere abbildbar.

c. Polygone mit mEcken erster, 0Ecken zweiter und rEcken dritter Art; je nach Lage des Nullpunktes 2 Fälle: Fig. 7 und 8.

d. Polygone mit mEcken erster, lEcken zweiter und rEcken dritter Art; nur das Innere ist abbildbar; Fig. 9.

Bei Abbildung des Innern, wie des Aeussern eines Hyperbelpolygons können beliebig viele Ecken erster Art mit einem Winkel von 2π auftreten (Fig. 26). Bei Abbildung des Innern ist ferner höchstens eine Ecke zweiter Art mit Winkel 2π, aber beliebig viele Spitzen zulässig (Fig. 26); hingegen ist bei Abbildung des Aeussern nur eine Ecke zweiter Art mit Winkel 2π (Complement zu einer Spitze) zulässig.

Besondere Formen von Flächenstücken, deren Begrenzung aus gleichseitigen Hyperbeln besteht, geben die Figuren 14 bis 17, in welchen Fällen die Figur nur ein Aeusseres besitzt, dessen Begrenzung zusammenfallende Hyperbeln sind. Eine besondere Form bietet auch Figur 25; sämtliche Polygonswinkel sind Spitzen. Spezielle Formen werden wir in den Paragraphen 8 und 9 kennen lernen.

Für die folgenden Betrachtungen wird es von Wichtigkeit sein, die Beziehungen zwischen den Winkeln eines Hyperbelpolygons zu kennen.

Um die Winkelsumme eines Hyperbelpolygons, das nur Ecken erster Art und den Nullpunkt im Innern enthält, zu bestimmen, bilden wir die zEbene conform auf eine tEbene ab durch die Transformation $z^2 = t$.

Hiedurch geht jede gleichseitige Hyperbel mit dem Nullpunkt als Centrum

$$\alpha z^2 + \alpha_1 z_1^2 + \beta = 0$$

in die Gerade Linie

$$\alpha t + \alpha_1 t_1 + \beta = 0$$

über.

Die tEbene ist zweiblättrig, so dass wir an Stelle des Hyperbelpolygons der zEbene ein geradliniges Polygon erhalten, welches die beiden Blätter der tEbene überdeckt und den Windungspunkt erster Ordnung $t = 0$ im Innern enthält. Die tEbene ist durch Figur 27 dargestellt, wenn der Verzweigungsschnitt von $t = 0$ nach $t = \infty$ geradlinig gezogen ist. Gemäss der Conformität der Abbildung (denn singulär

sind nur die Punkte $t = 0$ und $t = \infty$) geht jeder Polygonswinkel $\alpha_\mu \cdot \pi$ der zEbene in den gleichen Polygonswinkel der tEbene über. Die Figur 27 zeigt aber ohne weiteres, dass die Winkelsumme des Polygons $(m-4)\pi$ ist, wenn m die Zahl der Ecken bedeutet. Die Summe der Aussenwinkel beträgt demnach $(m+4)\pi$.

Liegt der Punkt $z = 0$ ausserhalb des Polygons (Fig. 2), so ist die entsprechende Figur der tEbene leicht zu konstruieren; dieselbe zeigt, dass in diesem Falle die Summe der Innenwinkel

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \cdot \pi = (m-2)\pi$$

und die Summe der Aussenwinkel

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu \cdot \pi = (m+2)\pi$$

ist.

Bemerkt man noch, dass durch die Transformation $z^2 = t$ ein Winkel, dessen Scheitel im Punkte $z = 0$ oder $z = \infty$ liegt, in der tEbene verdoppelt wird, so ergeben sich mühelos folgende wichtige Relationen:

1. Polygon mit m Ecken erster, 0 Ecken zweiter und 0 Ecken dritter Art; Nullpunkt im Innern (Fig. 1):

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m-4 \tag{12}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu = m+4. \tag{12a}$$

2. Polygon mit m Ecken erster, 0 Ecken zweiter und 0 Ecken dritter Art; Nullpunkt nicht im Innern (Fig. 2):

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m-2 \tag{13}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu = m+2. \tag{13a}$$

3. Polygon mit m Ecken erster, l Ecken zweiter und 0 Ecken dritter Art; Fig. 5 für das Innere:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu + 2\sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda = m + l - 2. \tag{14}$$

4. Polygon mit m Ecken erster, l Ecken zweiter und 0 Ecken dritter Art; Fig. 6 für das Aeussere:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu + 2 \sum_{\lambda=1}^{l} \beta'_\lambda = m + l + 4. \tag{15}$$

5. Polygon mit m Ecken erster, 0 Ecken zweiter und r Ecken dritter Art; Nullpunkt im Innern; Fig. 8:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - 2 \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = m + r - 4. \tag{16}$$

6. Polygon mit m Ecken erster 0 Ecken zweiter und r Ecken dritter Art; Nullpunkt nicht im Innern; Fig. 7:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - 2 \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = m + r - 2. \tag{17}$$

7. Polygon mit m Ecken erster, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art; Fig. 9:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu + 2 \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda - 2 \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = m + l + r - 2. \tag{18}$$

Die Modifikationen, welche diese Winkelrelationen erfahren können, sind leicht ohne Betrachtung der t Ebene zu finden; wir unterlassen deshalb ihre weitere Ausführung.

§ 3.

Abbildung des Innern eines geschlossenen Hyperbelpolygons auf die Halbebene.

In der z Ebene sei ein geschlossenes Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art; der Punkt $z = 0$ liege im Innern (Fig. 1).

Setzt man in Gleichung (1) $\varphi(z) = z^2$, so geht dieselbe über in die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Centrum der Nullpunkt ist:

$$\alpha z^2 + \alpha_1 z_1^2 + \beta = 0.$$

Gemäss § 1 Gleichung (3) ist die Function

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu}$$

längs der ganzen Begrenzung mit Einschluss der Ecken eindeutig und stetig.[1])

[1]) Es lässt sich leicht direkt nachweisen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung $\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = R(Z)$, wenn $R(Z)$ eine ratio-

Da $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = \frac{1}{z}$, so ist die Bedingung, welcher $\varphi(z)$ genügen muss (§ 1. I), erfüllt.

Um die übrigen, durch die Natur der Funktion $\varphi(z)$ hervorgerufenen Unstetigkeitspunkte zu finden, verfahren wir in folgender Weise:

Für einen beliebigen Punkt $z = g$, dessen Bildpunkt $Z = G$ ist, haben wir die Entwicklung:

$$z - g = \gamma_1 (Z - G) + \gamma_2 (Z - G)^2 + \ldots . \qquad (19)$$

Entwickelt man hiernach die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{z'}{z} + \frac{z''}{z'},$$

so ergeben sich die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ als die einzigen möglichen Unstetigkeitsstellen.

Handelt es sich um die Abbildung des Innern des fraglichen Polygons, so gibt nur der Punkt $z = 0$ eine in Betracht kommende singuläre Stelle. Ist die complexe Zahl $Z = \Gamma = A + Bi$ das Bild des Punktes $z = 0$, so gilt für diesen Punkt gemäss Gleichung (19) die Entwicklung:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{1}{Z - \Gamma} + \mathfrak{P}(Z - \Gamma) \qquad (20)$$

Es ist mithin die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{1}{Z - \Gamma}$$

auch für $z = 0$ holomorph.

Damit dieselbe aber für reelle Z reell bleibt, muss auch der zu Γ konjugierte Punkt $\Gamma_1 = A - Bi$ in gleicher Weise wie $Z = \Gamma$ als singuläre Stelle auftreten.

Mithin ist bei Abbildung des Innern des gegebenen Hyperbelpolygons die Funktion

---

nale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt, nichts anderes als die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist. — Conf. Sanio: „Die Abbildung des Aeussern eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche.“ Königsberg i. Pr. Inauguraldissertation 1885. pag. 7. — Einen Beweis für den allgemeinen Fall von regulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung findet man in vorliegender Abhandlung, II. Abschnitt, § 1, I.

$$\Phi \equiv \frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \frac{1}{Z-\Gamma} - \frac{1}{Z-\Gamma_1} \quad (21)$$

im ganzen in Betracht kommenden Gebiete $Y > 0$ holomorph.

Dass die Funktion Φ auch für $Z = \infty$ der Forderung der Holomorphität genügt, zeigt folgende Entwicklung:

Wir bilden die ZEbene auf eine tEbene ab durch die Transformation $Z = \frac{1}{t}$ und untersuchen Φ an der Stelle $t = 0$. Sind die Punkte $z = a$, $t = 0$ (und $Z = \infty$) einander zugeordnet, so findet die Entwicklung statt:

$$z - a = \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \ldots .$$

Nun ist

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dZ} = -t^2 \cdot \mathfrak{P}(t)$$

Ferner

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = t \cdot \mathfrak{P}(t)$$

und da auch

$$\frac{k}{Z - K} = \frac{k \cdot t}{1 - Kt},$$

so ergibt sich $\Phi = t \cdot \mathfrak{P}(t)$ d. h. $\Phi = 0$ für $t = 0$ oder $Z = \infty$.

Da nun Φ im ganzen Gebiete $Y > 0$ holomorph ist, so ist sie in diesem Gebiete nach den Lehren der Funktionentheorie gleich einer Constanten. Diese Constante ist, wie obige Entwicklung für $Z = \infty$ zeigt, gleich Null, so dass im betrachteten Gebiete die Gleichung gilt:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \frac{1}{Z-\Gamma} - \frac{1}{Z-\Gamma_1} = 0 \quad (21\,a)$$

Wählt man Null als untere Grenze der Integration, um die Constanten zu fixieren, so ergibt sich:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot (Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1) \cdot dZ + C' \quad (22)$$

Diese Gleichung vermittelt die Abbildung des betrachteten Hyperbelpolygons.

Dass der Punkt $Z = \infty$ kein singulärer ist, lässt sich auch an der Integralgleichung zeigen.

Setzt man nämlich $Z = \frac{1}{t}$, so geht Gleichung (22) über in

$$z^2 = -C \cdot \int_0^t \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (1 - A_\mu t)^{\alpha_\mu - 1} (1 - \Gamma t)(1 - \Gamma_1 t)\, dt}{t^{\Sigma \alpha_\mu - m + 4}} + C''$$

Da aber nach Gleichung (12) für das betrachtete Polygon

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m - 4$$

ist, so hat man

$$z^2 = -C \cdot \int_0^t \prod_{\mu=1}^{m} (1 - A_\mu t)^{\alpha_\mu - 1} \cdot (1 - \Gamma t)(1 - \Gamma_1 t)\, dt + C'$$

Der Punkt $t = 0$ ist also kein singulärer und mithin auch der Punkt $Z = \infty$ kein solcher.

Eine Modifikation [1]) tritt ein, wenn ein Term A_μ unendlich gross ist d. h. wenn das Bild der Ecke $z = a_\mu$ der Punkt $Z = \infty$ ist.

Wir wenden, wie oben, die Transformntion $Z = \frac{1}{t}$ an; dann gibt das Schwarz'sche Theorem die Entwicklung:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = t \cdot \mathfrak{P}(t) \text{ d. h.}$$

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = 0$$

für $t = 0$ oder $Z = \infty$.

Der Punkt $Z = \infty$ bringt mithin keine Unstetigkeit hervor, so dass an Stelle der Entwicklung (21) folgende tritt:

$$\Phi = \frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m=1} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \frac{1}{Z - \Gamma} - \frac{1}{Z - \Gamma_1}$$

Daraus ergeben dieselben Schlüsse wie oben die gesuchte Abbildung:

[1]) Die analoge Bemerkung gilt für alle folgenden Abbildungen: Wird ein Term A_μ unendlich gross, so fällt der entsprechende Summand der Differentialgleichung und damit der entsprechende Faktor der Integralgleichung einfach fort.

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m-1} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot (Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1)\, dZ + C' \quad (23)$$

Der Punkt $Z = \Gamma$, das Bild des Punktes $z = 0$ ist beliebig, muss nur im Innern der Halbebene $Y > 0$ liegen, wie die Forderung der Conformität der Abbildung erheischt.

Hat das Hyperbelpolygon m Ecken erster Art und den Punkt $z = 0$ nicht im Innern (Fig. 2), so fällt die Entwicklung (20) fort, so dass im Gebiete $Y > 0$ die Funktion:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu}$$

holomorph ist. Ihr constanter Wert ergibt sich durch eine gleiche Betrachtung wie oben gleich Null, so dass im Gebiete $Y > 0$ die Gleichung statthat:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} = 0$$

Die Integration ergibt die gesuchte Abbildung:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ + C' \quad (24)$$

Die Holomorphität dieser Funktion an der Stelle $Z = \infty$ ergibt sich wieder durch die Transformation $Z = \frac{1}{t}$. Man erhält

$$z^2 = -C \cdot \int_0^t \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (1 - A_\mu t)^{\alpha_\mu - 1}\, dt}{t^{\Sigma \alpha_\mu - m + 2}} + C'$$

Da aber nach Gleichung (13) in diesem Hyperbelpolygon

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m - 2$$

ist, so ist $t = 0$ d. h. $Z = \infty$ kein singulärer Punkt.

Jede gleichseitige Hyperbel kann in zwei aufeinander senkrechte, durch den Nullpunkt gehende gerade Linien ausarten. Umgekehrt kann jedes Stück einer Geraden, welche durch den Nullpunkt geht, als Bogen einer gleichseitigen Hyperbel betrachtet werden. Ecken

erster Art, welche von einer solchen Geraden und einer wirklichen Hyperbel gebildet werden, bringen keine weiteren Unstetigkeiten als die jeder gewöhnlichen Ecke hervor.

Anders dagegen die Ecken zweiter Art. (Vgl. § 2.)

Das abzubildende Polygon habe m Ecken erster und l Ecken zweiter Art (Fig. 5). Da eine Ecke zweiter Art von zwei Geraden gebildet wird, so gibt der Schwarz'sche Satz ohne weiteres die Entwicklung:

$$z = (Z - B_\lambda)^{\beta_\lambda} \cdot \mathfrak{P}(Z - B_\lambda),$$

wenn die Ecke den Winkel $\beta_\lambda \cdot \pi$ und ihr Scheitel das Bild $Z = B_\lambda$ hat. Daraus ergibt sich:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{2\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda} + \mathfrak{P}(Z - B_\lambda) \qquad (25)$$

Untersucht man noch den Wert der Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right]$$

für unendliche grosse Z, so ergibt sich durch Anwendung der Transformation $Z = \frac{1}{t}$, analog dem früheren Verfahren

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = 0 \text{ für } Z = \infty.$$

Für das betrachtete Hyperbelpolygon ist mithin die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} \quad \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda}$$

im Gebiete $Y > 0$ überall holomorph, mithin constant und zwar gleich Null.

Die Abbildung des Polygons auf die Halbebene wird daher vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B_\lambda)^{2\beta_\lambda - 1} \cdot dZ + C' \qquad (26)$$

Durch die Transformation $Z = \frac{1}{t}$ ergibt sich als Bedingung der Holomorphität für $Z = \infty$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu + 2\sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda - m - l + 2 = 0.$$

Diese Bedingung ist nach Gleichung (14) erfüllt.

§ 4.

Abbildung des Aeussern eines geschlossenen Hyperbelpolygons auf die Halbebene.

Das Polygon habe wieder m Ecken erster Art; der Punkt $z = 0$ sei von dem Perimeter eingeschlossen (Fig. 1). Bezeichnen wir die äusseren Winkel des Polygons mit $\alpha'_\mu \cdot \pi$, die zugehörigen Bildpunkte der Scheitel mit A'_μ, so ist nach Gleichung (3) die Funktion:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{Z - A'_\mu}$$

am Rande des Polygons eindeutig und stetig.

Für den Punkt $z = \infty$, welcher jetzt im Innern des abzubildenden Flächenstückes liegt, ist, wenn $Z = \Gamma' = A' + B'i$ dessen Bild ist, die Entwicklung (19) zu ersetzen durch:

$$z = \frac{\gamma}{Z - \Gamma'} + \mathfrak{P}(Z - \Gamma')$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{-3}{Z - \Gamma'} + \mathfrak{P}(Z - \Gamma') \qquad (27)$$

Aus bekannten Gründen tritt aber der Punkt $Z = \Gamma'_1 = A' - B' \cdot i$ in gleicher Weise wie $Z = \Gamma'$ als singuläre Stelle auf (vgl. S. 13).

Es ist aber $\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = 0$ für $Z = \infty$ wie auf Seite 14 bewiesen. Mithin ist im ganzen betrachteten Gebiete die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{Z - A'_\mu} + \frac{3}{Z - \Gamma'} + \frac{3}{Z - \Gamma'_1}$$

holomorph, folglich constant und zwar gleich Null, sodass die vorgelegte Abbildung vermittelt ist durch die Gleichung:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{Z - A'_\mu} + \frac{3}{Z - \Gamma'} + \frac{3}{Z - \Gamma'_1} = 0$$

Die Integration liefert:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} + C' \qquad (28)$$

Damit der Punkt $Z = \infty$ kein singulärer ist, muss $\Sigma \alpha'_\mu - m - 4 = 0$ sein; dies ist nach Gleichung (12a) thatsächlich der Fall.

Der Punkt $Z = \Gamma'$ ist nicht beliebig. Er ergibt sich aus folgender Betrachtung. Entwickelt man in Gleichung (28) die unter dem Integralzeichen stehende Funktion für die in der Nähe des Punktes $Z = \Gamma'$ gelegenen Punkte, so erhält man:

$$z^2 = -\frac{C \cdot \prod_{\mu=1}^{m} (\Gamma' - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1}}{(\Gamma' - \Gamma'_1)^3} \cdot \left\{ \frac{1}{2(Z - \Gamma')^2} + \frac{N}{2(Z - \Gamma')} + \frac{P}{2} \log (Z - \Gamma') \right\} + \mathfrak{P}(Z - \Gamma')$$

Dabei ist:

$$N = \frac{-3}{\Gamma' - \Gamma'_1} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{\Gamma' - A'_\mu}$$

$$P = \left\{ \frac{-3}{\Gamma' - \Gamma'_1} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{\Gamma' - A'_\mu} \right\}^2 + \frac{3}{(\Gamma' - \Gamma'_1)^2} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{(\Gamma' - A'_\mu)^2}$$

Da aber ein logarithmisches Unendlichwerden eine unendliche Vieldeutigkeit nach sich zieht, so muss der Faktor P von $\log (Z - \Gamma')$ verschwinden. Da ferner $\Gamma' = A' + B'i$ und $\Gamma'_1 = A' - B'i$ gesetzt wurde, so ist:

$$\left\{ -\frac{3}{2B'i} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{A' + B'i - A'_\mu} \right\}^2 - \frac{3}{4B'^2} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{(A' + B'i - A'_\mu)^2} = 0 \qquad (29)$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären ergeben sich hieraus zwei Gleichungen zur Bestimmung von A' und B'.

Handelt es sich um die Abbildung eines Hyperbelpolygons mit m Ecken erster Art, welches sowohl den Punkt $z = 0$ als auch den Punkt $z = \infty$ im Innern der abzubildenden Fläche (Aeusseres des Polygons) enthält, so gilt für $z = 0$ die Entwicklung (20) und für $z = \infty$ die Entwicklung (27), sodass in dem in Frage kommenden Gebiet die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{Z - A'_\mu} - \frac{1}{Z - \Gamma'} - \frac{1}{Z - \Gamma'_1} + \frac{3}{Z - \Gamma'} + \frac{3}{Z - \Gamma'_1}$$

holomorph und somit constant ist. Ihr constanter Wert ergibt sich durch Betrachtung des Punktes $Z = \infty$ wie oben.

Analog den obigen Entwicklungen (conf. § 3) wird daher die Abbildung des Aeussern des genannten Hyperbelpolygons vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot (Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1)}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} \cdot dZ + C' \quad (30)$$

Der Punkt $Z = \Gamma'$ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\left\{ \frac{-3}{2B'i} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{A' + B'i - A'_\mu} + \frac{1}{A' + B'i - \Gamma} + \frac{1}{A' + B'i - \Gamma_1} \right\}^2$$

$$- \frac{3}{4B'^2} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{(A' + B'i - A'_\mu)^2} - \frac{1}{(A' + B'i - \Gamma)^2} - \frac{1}{(A' + B'i - \Gamma_1)^2} = 0. \quad (31)$$

Die Forderung der Holomorphität der Integralfunktion (30) für $Z = \infty$ ergibt durch die Transformation $Z = \frac{1}{t}$ die Bedingung: $\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu - m - 2 = 0$, welche nach Gleichung (13a) erfüllt ist.

Kommt endlich der Punkt $z = 0$ als Polygonsecke vor (Fig. 4, 5 und 6), so entspricht einer derartigen Ecke mit Winkel $\beta'\pi$, wenn deren Bild der Punkt $Z = B'$ ist, eine Entwicklung von der Form (25). Hat das fragliche Polygon m Ecken erster Art und l Ecken zweiter Art, so ist bei der gewohnten Bezeichnungsweise die Funktion:

$$\frac{d}{d\bar{Z}} \left[\log \left(z \cdot \frac{dz}{d\bar{Z}} \right) \right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{\bar{Z} - \bar{A}'_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2\beta'_\lambda - 1}{Z - B'_\lambda} + \frac{3}{Z - \Gamma'} + \frac{3}{Z - \Gamma'_1}$$

im betrachteten Gebiete holomorph; ihr constanter Wert ist Null (conf. § 3).

Die Abbildung des Aeussern wird also vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B'_\lambda)^{\beta'_\lambda - 1} \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} + C' \quad (32)$$

Der Punkt $Z = \Gamma'$ ist gegeben durch die Gleichung:

$$\left\{ \frac{-3}{2B'i} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{A' + B'i - A'_\mu} + \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2\beta'_\lambda - 1}{A' + B'i - B'_\lambda} \right\}^2 - \frac{3}{4B'^2}$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{(A' + B'i - A'_\mu)^2} - \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2\beta'_\lambda - 1}{(A' + B'i - B'_\lambda)^2} = 0 \quad (33)$$

§ 5.

Abbildung von Hyperbelpolygonen, welche sich ins Unendliche erstrecken.

Eine Ecke dritter Art kann nach § 2 gebildet werden:

1. von zwei Hyperbelästen; der Winkel $\gamma \cdot \pi$ dieser Ecke ist gleich dem Winkel, welchen die zu diesen Aesten gehörigen Asymptoten im Punkte $z = 0$ bilden;

2. von einem Hyperbelaste und einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden. Der Winkel $\gamma \cdot \pi$ dieser Ecke ist gleich dem Winkel, welchen die Gerade mit der Asymptote des Hyperbelastes im Punkte $z = 0$ einschliesst;

3. von zwei durch den Nullpunkt gehenden Geraden (degenerierten Hyperbeln). Der Winkel $\gamma \cdot \pi$ dieser Ecke ist gleich dem Winkel der Geraden im Punkte Null.

Im Falle 1 setzen wir $z^2 = t$. Die beiden den Winkel $\gamma \cdot \pi$ einschliessenden Hyperbeln h und h_1 gehen in zwei Gerade g und g_1 der t Ebene über, ihre Asymptoten in zwei durch $t = 0$ gehende Gerade l und l_1. Nun ist $l \parallel g$ und $l_1 \parallel g_1$, $\sphericalangle (g g_1)$ mit dem Scheitel $t = \infty$ gleich $\sphericalangle (l l_1)$ der Asymptotenbilder. Die Winkel im Punkte $z = 0$ haben sich aber in der t Ebene verdoppelt und es ist demnach $\sphericalangle (l l_1) = \sphericalangle (g g_1) = 2\gamma\pi$.

Ist der reelle Punkt $Z = C$ das Bild des Scheitels $t = \infty$, so ist nach dem Schwarz'schen Theorem die Funktion, welche den Winkel $2\gamma\pi$ der t Ebene (Scheitel $t = \infty$) in einen gestreckten der Z Ebene (Scheitel $Z = C$) verwandelt, in der Nähe dieser Stelle analytisch dargestellt durch

$$t = \frac{1}{(Z-C)^{2\gamma}} \cdot \mathfrak{P}(Z-C)$$

daraus ergibt sich an dieser Stelle die Entwicklung:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dt}{dZ}\right)\right] = -\frac{2\gamma+1}{Z-C} + \mathfrak{P}(Z-C) \quad (34)$$

Analoge Betrachtungen ergeben das gleiche Resultat für die Fälle 2 und 3. Für den dritten Fall ergibt sich das Resultat auch leicht direkt, da der Winkel $\gamma \cdot \pi$ im Punkte $z = \infty$ von zwei geraden Linien gebildet wird und somit die Entwicklung statthat:

$$z = \frac{1}{(Z-C)^{\gamma}} \cdot \mathfrak{P}(Z-C).$$

Hat das abzubildende Flächenstück, welches den Punkt $z = 0$ nicht im Innern enthalten soll (Fig. 7), m Ecken erster Art mit den Winkeln $\alpha_\mu \cdot \pi$ und den Bildern $Z = A_\mu$ ($\mu = 1, 2 \ldots m$), ferner r Ecken dritter Art mit den Winkeln $\gamma_\varrho \cdot \pi$ und den Bildern $Z = C_\varrho$ ($\varrho = 1, 2 \ldots r$), so ist nach den bisherigen Erörterungen die Funktion

$$\Phi = \frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{2\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho}$$

in der ganzen Halbebene $Y > 0$ holomorph, folglich in diesem Gebiete constant und zwar gleich Null, wie die Betrachtung des Punktes $Z = \infty$ ergibt.

Die Abbildung wird also vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{2\gamma_\varrho + 1}} + C' \qquad (35)$$

Setzt man unter dem Integralzeichen $Z = \frac{1}{t}$, so ergibt die Forderung der Holomorphität für $Z = \infty$ die Bedingung

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - 2\sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho - m - r + 2 = 0.$$

Nach Gleichung (17) ist diese Bedingung erfüllt.[1])

Ist für irgend eine Ecke $\varrho = \varkappa$, $2\gamma_\varrho + 1 = k$ und k eine ganze Zahl, so ist der zugehörige Bildpunkt $C_\varkappa$ durch folgende Betrachtung bestimmt: Entwickelt man die Abbildungsfunktion für die in der Nähe des Punktes $Z = C_\varkappa$ liegenden Punkte und setzt dabei zur Abkürzung:

$$M = \left[\frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot (Z - C_\varkappa)^k}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{2\gamma_\varrho + 1}}\right] \text{ für } Z = C_\varkappa$$

$$f_1 = \left[\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{2\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} + \frac{k}{Z - C_\varkappa}\right] Z = C_\varkappa$$

[1]) Im allgemeinen sind die Punkte A_μ, $B\lambda$ und C_ϱ durch Nebenbedingungen bestimmt. Die betreffenden Bedingungsgleichungen können in derselben Weise aufgestellt werden, wie dies Christoffel bei geradlinigen Polygonen gethan (l. c.). Wir übergehen diese allzulangen Ausführungen.

$$f_2 = f_1^2 + \left[\frac{\partial f_1}{\partial Z}\right] Z = C_\varkappa$$

$$f_\mu = f_1 \cdot f_{\mu-1} + \left[\frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial Z}\right] Z = C_\varkappa$$

so ergibt sich:

$$z^2 = \begin{cases} \dfrac{-C \cdot M}{(k-1)(Z-C_\varkappa)^{k-1}} - \dfrac{C \cdot M}{(k-1)(k-2)(Z-C_\varkappa)^{k-2}} \cdot f_1 - \cdots \\ - \cdots - \dfrac{C \cdot M}{(k-1)!\,(Z-C_\varkappa)} \cdot f_{\varkappa-2} - \dfrac{C \cdot M}{(k-1)!} \cdot f_{\varkappa-1} \cdot \log(Z-C_\varkappa) \\ + \mathfrak{P}(Z-C_\varkappa) \end{cases}$$

Um logarithmische Unstetigkeiten zu vermeiden, haben wir deshalb die Bedingungsgleichung:

$$f_{\varkappa-1} = 0 \tag{36}$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären ergeben sich hieraus zwei Gleichungen zur Bestimmung des Punktes $Z = C_\varkappa$.

Enthält das Polygon im Innern auch den Punkt $z = 0$ (Fig. 8) und ist dessen Bild der Punkt $Z = \Gamma$, so ist nach den obigen Erwägungen die Funktion:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{2\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} - \frac{1}{Z-\Gamma} - \frac{1}{Z-\Gamma_1}$$

im Gebiete $Y > 0$ holomorph und mithin constant und zwar ergibt sich ihr Wert gleich Null.

Die Abbildung wird daher vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z-A_\mu)^{\alpha_\mu - 1}\,(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1) \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z-C_\varrho)^{2\gamma_\varrho+1}} + C' \tag{37}$$

Die Forderung der Holomorphität der Integralfunktion für $Z = \infty$ gibt die Bedingung:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - 2\sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho - m - r + 4 = 0.$$

Diese Bedingung ist nach Gleichung (16) erfüllt.

Ist für den Punkt $\varrho = \varkappa$ $2\gamma_\varkappa + 1 = k$ gleich einer ganzen Zahl, so ist er bestimmt durch

$$f_{\varkappa-1} = 0, \text{ wenn}$$

$$f_1 = \left[\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{2\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} + \frac{k}{Z - C_\varkappa} + \frac{1}{Z - \Gamma} + \frac{1}{Z - \Gamma_1}\right] Z = C_\varkappa$$

Enthält endlich das Hyperbelpolygon m Ecken erster, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art (Fig. 9), so ist bei gewohnter Bezeichnungsweise infolge der öfter angewandten Entwicklungen 3, 25 und 34 die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda} + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{2\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho}$$

im betrachteten Gebiete holomorph. In gewohnter Weise findet man die gesuchte Abbildung als:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B_\lambda)^{2\beta_\lambda - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{2\gamma_\varrho + 1}} \qquad (38)$$

Ist irgend ein Punkt durch die zugehörige Gleichung $f_{\varkappa-1} = 0$ bestimmt, so ist für $2\gamma_\varrho + 1 = k$

$$f_1 = \left[\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda} - \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{2\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} + \frac{k}{Z - C_\varkappa}\right] Z = C_\varkappa$$

§ 6.

Uebergang von der positiven Halbebene $Y = 0$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene.

Bekanntlich wird die positive Halbebene $Y = 0$ durch die Transformation $\zeta = \frac{Z - i}{Z + i}$ oder $Z = i \cdot \frac{\zeta + 1}{1 - \zeta}$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene conform übertragen.

Ist auf dem Rande des Einheitskreises der Punkt $\zeta = e^{i\psi_\mu}$ das Bild derjenigen Polygonsecke, welche den Winkel $\alpha_\mu \cdot \pi$ einschliesst, so ist nach obiger Substitution $A_\mu = i \cdot \frac{1 + e^{i\psi_\mu}}{1 - e^{i\psi_\mu}}$.

Es lässt sich ohne weiteres aus den aufgestellten Formeln, welche ein Flächenstück auf die Halbebene abbilden, die entsprechende Formel zur Abbildung auf den Einheitskreis angeben, letztere sehr häufig in eleganter Form. Haben wir z. B. ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art, den Nullpunkt im Innern, so gibt

die Gleichung (22) die Abbildung. Lassen wir die Punkte $z=0$ und $\zeta=0$ entsprechen und berücksichtigen, dass für diesen Fall $\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m-4$[1]) ist, so ist die Abbildung des genannten Polygons auf den Einheitskreis vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^\zeta \prod_{\mu=1}^{m} (\zeta - e^{i\psi_\mu})^{\alpha_\mu - 1} \cdot \zeta \cdot d\zeta + C' \tag{39}$$

Ebenso findet man zur Abbildung des Aeussern des genannten Hyperbelpolygons, wenn $z=\infty$ und $\zeta=\varrho_1 \cdot e^{i\vartheta}$ einander entsprechen:

$$z^2 = C \cdot \int_0^\zeta \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (\zeta - e^{i\psi'_\mu})^{\alpha'_\mu - 1} \cdot d\zeta}{[(\zeta - \varrho_1 \cdot e^{i\vartheta})(1 - \varrho_1 \cdot e^{-i\vartheta} \cdot \zeta)]^3} + C'. \tag{40}$$

Zur Bestimmung des Punktes $\zeta=\varrho_1 \cdot e^{i\vartheta}$ hat man die Gleichung:

$$\left\{ 3 \cdot \frac{\varrho_1 - e^{i\vartheta}}{1-\varrho_1^2} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{(\alpha'_\mu - 1)(1 - e^{i\psi'_\mu})}{\varrho_1 - e^{i(\psi'_\mu - \vartheta)}} \right\}^2 + 3 \cdot \left(\frac{\varrho_1 - e^{i\vartheta}}{1-\varrho_1^2} \right)^2 - \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha'_\mu - 1) \cdot \left(\frac{1 - e^{i\psi'_\mu}}{\varrho_1 - e^{i(\psi'_\mu - \vartheta)}} \right)^2 = 0. \tag{41}$$

Es ist zu bemerken, dass die untere Grenze nicht, wie die Transformation ergibt, $\zeta=-1$ gewählt ist, sondern der Einfachheit halber $\zeta=0$. Diese Annahme hat nur eine Aenderung der Integrationskonstanten zur Folge.

§ 7.

Abbildung von symmetrischen und regulären Hyperbelpolygonen auf den Einheitskreis.

Ist in der z Ebene ein symmetrisches[2]) Hyperbelpolygon gegeben, welches von m Hyperbeln gebildet wird, so ist die Anzahl der Ecken $2m$ und ebenso die Anzahl der Seiten. Hat eine Ecke den Polygons-

---

[1]) Beim Uebergang von der Halbebene $Y>0$ zum Einheitskreis der ζ Ebene müssen die Winkelrelationen (12) bis (18) zu Hilfe genommen werden, um zu sehen, dass $z=\infty$ d. h. $\zeta=1$ keine singuläre Stelle ist.

[2]) Unter einem symmetrischen Hyperbelpolygon verstehen wir ein solches in dem jede durch den Nullpunkt gehende Gerade den Rand des Polygons in zwei zum Nullpunkt symmetrisch liegenden Punkten schneidet.

winkel $\alpha_\mu \cdot \pi$, so hat auch die symmetrisch gelegene Ecke denselben Winkel; die Bilder zweier symmetrischer Ecken liegen auch auf der Peripherie des Einheitskreises symmetrisch gegen den Nullpunkt. Haben also die Bilder von m aufeinander folgenden Ecken die Coordinaten $\zeta = e^{i\psi_\mu}$ $(\mu = 1, 2 \ldots m)$, so haben die Bilder der m symmetrischen Ecken die Coordinaten $\zeta = e^{i(\psi_\mu + \pi)}$. Da aber $e^{i(\psi_\mu + \pi)} = -e^{i\psi_\mu}$ ist, so lässt sich die Abbildungsfunktion für diesen Fall (Gleichung 39) auch schreiben:

$$z^2 = C \cdot \int_0^\zeta \prod_{\mu=1}^{m} \{(\zeta - e^{i\psi_\mu})(\zeta + e^{i\psi_\mu})\}^{\alpha_\mu - 1} \cdot \zeta \cdot d\zeta + C'$$

oder auch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \prod_{\mu=1}^{m} (s - e^{2i\psi_\mu})^{\alpha_\mu - 1} \cdot ds + C' \qquad (42)$$

Hiebei entsprechen sich die Punkte $z = 0$ und $\zeta = 0$.

Ist das Aeussere des besprochenen Polygons abzubilden, so lehrt die Symmetrie, dass die Punkte $z = \infty$ und $\zeta = 0$ einander entsprechen, was durch Gleichung (41) leicht verifiziert werden kann. Die Abbildung wird daher vermittelt durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^\zeta \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (\zeta^2 - e^{2i\psi'_\mu})^{\alpha'_\mu - 1} \cdot d\zeta}{\zeta^3} + C'$$

oder auch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (s - e^{2i\psi'_\mu})^{\alpha'_\mu - 1} \cdot ds}{s^2} + C' \qquad (43)$$

Betrachten wir noch reguläre Polygone.

Hier ist $$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots . \alpha_m = \frac{m-2}{m}$$

$$\alpha_1' = \alpha_2' = \ldots . \alpha_m' = \frac{m+2}{m}$$

Wählt man $\varphi_1 = 0$ und $\varphi'_1 = 0$, so wird nach Gleichung (42) das Innere eines von m Hyperbeln gebildeten Polygons auf den Einheitskreis abgebildet durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{ds}{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}} + C', \qquad (44)$$

das Aeussere nach Gleichung (43) durch:

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}} \cdot ds}{s^2} + C' \qquad (45)$$

Es ist klar, dass bei Abbildung von regulären Hyperbelpolygonen der Charakter einer Geraden als Symmetrielinie invariant ist beim Uebergang auf den Einheitskreis, eine Thatsache, welche auch leicht durch Entwicklung der Integrale (44) und (45) in Reihen einzusehen ist.[1])

Die Abbildung regulärer Hyperbelpolygone lässt sich ohne funktionentheoretische Betrachtungen in folgender Weise durchführen:

Durch die Transformation $z^2 = z'$ geht jeder Ast einer gleichseitigen Hyperbel in eine gerade Linie der z' Ebene über und zwar liegen die beiden Geraden, welche den beiden Aesten einer Hyperbel entsprechen, in beiden Blättern der z' Ebene übereinander, sodass sie sich decken. Das reguläre Hyperbelpolygon der z Ebene mit $2m$ Ecken ist in ein geradliniges reguläres Polygon der z' Ebene übergegangen, von welchem m Ecken im obern, m Ecken im untern Blatt der Riemann'schen Fläche liegen. Die Ecken und Seiten in beiden Blättern decken sich.

Nun wird das reguläre m Eck des oberen Blattes der z' Ebene durch die Transformation

$$z' = C \cdot \int_0^{\zeta'} \frac{d\zeta'}{(1 - \zeta'^m)^{\frac{2}{m}}} + C' \quad [2])$$

auf den Einheitskreis der ζ' Ebene übertragen. Das zweiblättrige Polygon der z' Ebene ist in den zweiblättrigen Einheitskreis der ζ' Ebene übergegangen und zwar liegen auf der Peripherie desselben die singulären Punkte sich deckend übereinander. Die Punkte $z' = 0$ und $\zeta' = 0$ entsprechen einander.

Setzt man $\zeta' = \zeta^2$, so geht der zweiblättrige Einheitskreis der ζ' Ebene in den einblättrigen Einheitskreis der ζ Ebene über und mithin wird durch

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{ds}{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}} + C'$$

---

[1]) Vergleiche II. Abschnitt. § 1. V.

[2]) H. A. Schwarz l. c.

das reguläre Hyperbelpolygon der z Ebene in den Einheitskreis der ζ Ebene übergeführt.

Eine gleiche Ueberlegung führt bei Abbildung von symmetrischen Hyperbelpolygonen (Abbildung des Innern, sowie des Aeussern) zum Ziele.

Auch für spezielle Kurven beliebiger Ordnung (Parabeln und reguläre Hyperbeln) lassen sich ähnliche Ueberlegungen machen.

§ 8.

Spezielle Fälle, welche vollständig durchführbar sind.

Einige Fälle lassen sich, wie aus der Form der Integrale ersichtlich, durch elliptische Funktionen vollständig durchführen.[1])

1. Setzen wir in Formel (44) $m = 4$, $C' = 0$, $C = 1$, so bildet die Transformation:

$$z^2 = \int_0^{\zeta^2} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}$$

oder:

$$\zeta^2 = \sin \operatorname{am} z^2, \mod \sqrt{-1} \qquad (46)$$

das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene und das Innere eines regulären Hyperbelachteckes mit den Ecken $\pm\sqrt{K}$, $\pm\sqrt{-K}$, $\pm\sqrt{Ki}$, $\pm\sqrt{-Ki}$ conform aufeinander ab, wenn $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = 1{,}3110$ ist.

Die entsprechenden Werte der Coordinaten für die Schnittpunkte der Orthogonalkurven einer „Quadrateinteilung“ beider Flächenstücke finden sich in Tabelle I. Die zugehörigen Figuren zeigt Tafel II Fig. 1.

2. Haben wir ein Polygon mit vier rechtwinkligen Ecken, welches den Punkt $z = 0$ nicht im Innern enthält, so ist in Gleichung (24) $m = 4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$ zu setzen, so dass man, wenn man in bekannter Weise von der positiven Halbebene $Y = 0$ auf das Innere des Einheitskreises übergeht und die Punkte $\zeta = +1$, -1, $+i$, $-i$ als singuläre Stellen wählt, die gesuchte Abbildung erhält:

---

[1]) Man vergleiche hiezu § 9, 2. — Um ein Bild vom Verlaufe der Funktionen in beiden Ebenen zu geben, haben wir die Berechnung und Construktion in einigen Fällen durchgeführt. Bei allen Berechnungen wurden die von H. A. Schwarz in Crelle's Journal Bd. 70 angegebenen Berechnungen, soweit thunlich, benützt.

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + C'$$

oder auch:

$$\zeta = \sin \operatorname{am}\left(\frac{z^2 - C'}{C}\right), \mod \sqrt{-1} \qquad (47)$$

Die Tabelle II gibt die zugehörigen Coordinaten der Schnittpunkte der Orthogonalkurven beider Ebenen mit dem Rande der aufeinander abgebildeten Flächenstücke für $C = 1$, $C' = 2iK$, $K = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$. Die nach dieser Tabelle konstruierten Figuren zeigt Tafel II Fig. 2.

3. Setzt man in Gleichung (26) $m = 3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$, $l = 1$, $\beta = \frac{1}{4}$, so ist in der z Ebene ein Hyperbelpolygon mit drei rechtwinkligen Ecken erster Art und einer Ecke zweiter Art mit Winkel 45°.

Die die Abbildung vermittelnde Transformation ist

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + C'$$

oder auch:

$$\zeta = \sin \operatorname{am} \frac{z^2 - C'}{C}, \mod \sqrt{-1}. \qquad (48)$$

Hiebei sind die Punkte $\zeta = 1, +i, -i$ die Bilder der rechtwinkligen Ecken, der Punkt $\zeta = -1$ das Bild der Ecke $z = 0$.

Die Tabelle III gibt für $C = 1$, $C' = i \cdot K$ die Coordinaten der Schnittpunkte der Orthogonalkurven mit dem Rande der aufeinander abgebildeten Flächenstücke. Die zugehörigen Figuren sind aus Tafel II Fig. 3 ersichtlich.

4. Setzt man in Gleichung (26) $m = 4$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$; $l = 1$; $\beta = \frac{1}{2}$, so ist in der z Ebene ein Hyperbelpolygon mit einer rechtwinkligen Ecke im Punkte $z = 0$. (Fig. 11 der Tafel I.)

Die Abbildung auf die Halbebene geht hervor aus der Transformation

$$z^2 = C \cdot \int_0^{Z} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)(Z-A_3)(Z-A_4)}} + C'$$

und mithin ist die Abbildung auf den Einheitskreis vermittelt durch:

$$\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}=\sin\operatorname{am}\left(\frac{z^2-C_1}{C_1}\right) \tag{49}$$

Ausser diesen vier Fällen lassen sich eine Reihe anderer Fälle durch elliptische Funktionen durchführen, wie aus der Form der Integrale ersichtlich ist. Obige einfachen Fälle mögen genügen.

Eine andere Reihe von Fällen führen auf algebraische Funktionen; solche sind:

5. Um das Innere des von einem Aste einer gleichseitigen Hyperbel eingeschlossenen Flächenstückes abzubilden, setzen wir in Gleichung (35) $m=0$, $r=1$, $\gamma=\frac{1}{2}$. Wir erhalten die Abbildung vermittelt durch

$$z^2=\frac{aZ+b}{Z-C} \tag{50}$$

Wählt man $C=\infty$, so ist nach einer früheren Bemerkung die Abbildung gegeben durch

$$z^2=aZ+b\,^{1}) \tag{50a}$$

6. Um das Aeussere des von einem Hyperbelaste begrenzten Flächenstückes abzubilden, setzen wir in Gleichung (37) $m=0$, $r=1$, $\gamma=\frac{3}{2}$, so dass wir die Abbildung erhalten:

$$z^2=\frac{aZ^3+bZ^2+cZ+d}{(Z-C)^3}. \tag{51}$$

Der Punkt $Z=C$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$f_3=0,$$

wenn $f_1=\left(\frac{1}{Z-\Gamma}+\frac{1}{Z-\Gamma_1}\right)_{Z=C}$ ist.

Ist $C=\infty$, so ist die Abbildung einfach:

$$z^2=aZ^3+bZ^2+cZ+d.\,^{2}) \tag{51a}$$

7. Um das Flächenstück, welches von zwei Armen zweier verschiedenen Hyperbeln eingeschlossen wird, den Nullpunkt nicht im Innern enthält und eine Ecke im Endlichen besitzt (Fig. 10 Raum I,

---

[1]) Dies stimmt im Wesentlichen mit der von Herrn F. Lindemann für allgemeine Hyperbeln gegebenen Formel: $z+\sqrt{z^2-e^2}=(Z+\sqrt{1+Z^2})^{\mu}$, wo $\mu\cdot\pi$ den Asymptotenwinkel bezeichnet, für $a=i\cdot\frac{e^2}{2}$, $b=\frac{e^2}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$.

[2]) Dies stimmt im Wesentlichen mit der Lindemann'schen Formel $z+\sqrt{z^2-e^2}=(Z+\sqrt{1+Z^2})^{\frac{3}{2}}$ für $a=2ie^2$, $b=0$, $c=\frac{3}{2}ie^2$, $d=\frac{e^2}{2}$.

II, III) abzubilden, setzen wir in Gleichung (35) $m = 1$, $r = 1$. Ist der Winkel im Endlichen $\alpha \cdot \pi$, so ist der Winkel im Punkte $z = \infty$ $\frac{\alpha}{2} \cdot \pi$, so dass sich die Abbildung ergibt:

$$z^2 = a \cdot \left(\frac{Z - A}{Z - C}\right)^{\alpha} + b \tag{52}$$

8. Um das Flächenstück abzubilden, welches von zwei Aesten zweier Hyperbeln eingeschlossen ist und den Punkt $z = 0$ im Innern enthält (Fig. 10 Raum IV), setzen wir in Gleichung (37) $m = 1$, $r = 1$. Bei der obigen Bezeichnungsweise ist die Abbildung:

$$z^2 = a \cdot \left(\frac{Z - A}{Z - C}\right)^{\alpha+2} + b \cdot \left(\frac{Z - A}{Z - C}\right)^{\alpha+1} + c \cdot \left(\frac{Z - A}{Z - C}\right)^{\alpha} + d \tag{53}$$

9. Zur Abbildung eines Flächenstückes, welches von zwei Aesten zweier Hyperbeln gebildet wird und nur im Punkte $z = \infty$ zwei Ecken hat (Fig. 12), setzen wir in Gleichung (37) $m = 0$, $r = 2$. Ist der kleinere Winkel der Asymptoten $\alpha \cdot \pi$, so ergibt sich die Abbildung:

$$z^2 = a \cdot \left(\frac{Z - C_1}{Z - C_2}\right)^{2\alpha} + b \left(\frac{Z - C_1}{Z - C_2}\right)^{2\alpha-1} + c \left(\frac{Z - C_1}{Z - C_2}\right)^{2\alpha-2} + d \tag{54}$$

10. Um das von beiden Aesten einer gleichseitigen Hyperbel eingeschlossene Flächenstück abzubilden, setzen wir in Gleichung (54) $\alpha = \frac{1}{2}$ und finden:

$$z^2 = \frac{a Z^2 + b Z + c}{(Z - C_1)(Z - C_2)} \tag{55}$$

[1])

Der Punkt C_1 ist bestimmt durch:

$$\frac{1}{C_1 - \Gamma} + \frac{1}{C_1 - \Gamma_1} - \frac{2}{C_1 - C_2} = 0,$$

der Punkt C_2 durch:

$$\frac{1}{C_2 - \Gamma} + \frac{1}{C_2 - \Gamma_1} - \frac{2}{C_2 - C_1} = 0.$$

11. Ein Hyperbelpolygon mit zwei rechtwinkligen Ecken erster Art, eine Ecke mit Winkel π im Unendlichen (Fig. 13); der Punkt $z = 0$ liegt im Innern der abzubildenden Fläche. In Gleichung (37) ist $m = 2$, $r = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ zu setzen, woraus sich ergibt:

[1]) Vergleiche F. Lindemann: „Die Abbildung der Halbebene u. s. w." 8.

$$z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)\,dZ}{(Z-C)^3 \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}} + C''$$

Durch Integration findet man die Abbildung:

$$z^2 = C_1' \cdot \frac{2\alpha\gamma + (4\beta\gamma - 3\alpha\delta)(Z-C)}{(Z-C)^2} \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)} + C_1'', \tag{56}$$

wobei gesetzt ist: $\alpha = (C-\Gamma)(C-\Gamma_1)$; $\beta = (2C-\Gamma-\Gamma_1)$;
$\gamma = (C-A_1)(C-A_2)$; $\delta = (2C-A_1-A_2)$.

Der Punkt $Z = C$ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$f_3 = 0,$$

wenn $f_1 = \left[\frac{1}{Z-\Gamma} + \frac{1}{Z-\Gamma_1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Z-A_1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Z-A_2}\right] Z = C$ ist.

12. Ein Hyperbelpolygon mit zwei Ecken erster Art, deren Winkel $\frac{3}{2}\cdot\pi$ ist, einer Ecke dritter Art mit Winkel π; der Punkt $z = 0$ liege nicht im Innern des abzubildenden Flächenstückes (Fig. 13). Setzt man in Gleichung (35) $m = 2$, $r = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\gamma = 1$, so ergibt sich die Abbildung:

$$z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}\cdot dZ}{(Z-C)^3} + C''$$

Die Integration ergibt:

$$z^2 = C_1' \cdot \frac{2\gamma + \delta(Z-C)}{(Z-C)^2} \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)} + C_1'' \tag{57}$$

Dabei sind γ und δ die Grössen der Gleichung (56). Der Punkt $Z = C$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$f_3 = 0,$$

wenn $f_1 = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Z-A_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{Z-A_2}\right] Z = C$ ist.

§ 9.

Abbildung von Hyperbelpolygonen, welche Ecken mit Winkel 2π oder Spitzen (Winkel von 0°) enthalten.

Das Schwarz'sche Theorem von der Darstellung einer analytischen Funktion, welche einen gegebenen Winkel $\alpha\cdot\pi$ in einen gestreckten verwandelt, bleibt richtig, wenn der von zwei Geraden begrenzte Winkel 2π oder auch 0 wird. Im erstern Falle bleibt

die Conformität erhalten, im letzteren aber wird die Abbildungsfunktion für die der Spitze entsprechende Unstetigkeitsstelle infolge der auftretenden Logarithmen unendlich vieldeutig. Für Polygone mit Spitzen und Polygonswinkeln 2π ergeben sich demnach die Abbildungen als spezielle Fälle der bisher betrachteten Abbildungen; indes ergibt sich dabei eine grosse Anzahl von Transformationen, welche wegen der Ausführbarkeit der auftretenden Quadraturen vollständig durchgeführt werden können und deshalb von grösserem Interesse sind.

Hiebei muss bemerkt werden:

a) Ecken erster Art mit Winkel 2π können sowohl bei Abbildung des Aeussern wie bei Abbildung des Innern in beliebiger Zahl auftreten;

b) Ecken zweiter Art mit Winkel 2π sind sowohl bei Abbildung des Aeussern wie bei der des Innern nur in der Anzahl eins zulässig;

c) Ecken dritter Art mit Winkel 2π sind bei Abbildung des Innern gar nicht, bei Abbildung des Aeussern nur in der Anzahl eins zulässig;

d) Spitzen können bei Abbildung des Innern in beliebiger Zahl, bei Abbildung des Aeussern nur in der Zahl eins auftreten (Fig. 26).

Die wichtigsten hieher gehörigen Abbildungen führen wir an.

1. Das Hyperbelpolygon habe m Ecken erster Art mit Winkeln 2π und m Ecken zweiter Art. Die Begrenzung besteht aus lauter doppelt zählenden Geraden (degenerierten Hyperbeln), welche durch den Nullpunkt gehen; das Innere des Polygons ist gänzlich verschwunden (Fig. 14). Setzt man in Gleichung (32) $\alpha'_\mu = 2$, $l = m$, so erhält man die Abbildung vermittelt durch die Transformation:

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu) \cdot \prod_{\mu=1}^{m} (Z - B'_\mu)^{2\beta'_\mu - 1} \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} + C' \qquad (58)$$

Hiebei ist $\sum_{\mu=1}^{m} \beta'_\mu = 4$; der Punkt $Z = \Gamma'$ ist durch Gleichung (29) bestimmt.

Sind die Winkel $\beta'_\mu \cdot \pi$ alle einander gleich, ebenso die Entfernungen der Eckpunkte vom Nullpunkt gleich, so dass die Figur in unserem Sinn als reguläres Polygon zu bezeichnen ist (Fig. 14),

so ergibt sich nach einigen Reduktionen zur Abbildung des Flächenstückes auf den Einheitskreis die Transformation:

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{\zeta^m - 1}{(\zeta^m + 1)^{\frac{m-4}{m}}} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^3} + C' \tag{59}$$

2. Setzt man in Gleichung (59) $m = 8$, so ergibt sich Figur 14. Die Abbildung führt auf das elliptische Integral

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{s^4 - 1}{(s^4 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{ds}{s^2} + C' \tag{60}$$

Setzt man in Gleichung (59) $m = 4$ und wählt als Ecken des Polygons die Punkte $z = +1, -1, +i, -i$, ordnet denselben ferner die Bilder $\zeta = +1, -1, +i, -i$ zu, so erhält man die Abbildung:

$$z^2 = \frac{1 + \zeta^4}{2\zeta^2} \tag{60a}$$

Nach Gleichung (29) entsprechen hier die Punkte $z = \infty$, $Z = i$, $\zeta = 0$ einander.

3. Bildet man das durch die doppelt gezählte Gerade von $z = 0$ bis $z = \infty$ begrenzte Flächenstück (Fig. 15) ab, so ist in Gleichung (38) $m = 0$, $l = 1$, $r = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ zu setzen. Die die Abbildung vermittelnde Transformation ist:

$$z = C' \cdot \left(\frac{Z - B}{Z - C}\right)^2 \quad ^{1)} \tag{61}$$

Ordnet man die Punkte $z = 0$ und $\zeta = 1$, ferner $z = \infty$ und $\zeta = -1$ einander zu, so erhält man zur Abbildung auf den Einheitskreis:

$$z = a\left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}\right)^2. \tag{61a}$$

4. Bildet man das Flächenstück ab, welches von dem doppelt zählenden Hyperbelaste zwischen $z = a$ und $z = \infty$ gebildet wird

---

[1]) Die Abbildung ist vermittelt durch: $z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{(Z-B)^3}{(Z-C)^5} \cdot dZ + C''$. Da die Punkte $z = 0$ und $Z = B$ zugeordnet sind, so ist $C'' = 0$ und es kann beiderseits die Quadratwurzel gezogen werden. Dem negativen Vorzeichen der Quadratwurzel entspricht eine Drehung des Einheitskreises um 180°.

(Fig. 16), so hat man in Gleichung (37) $m = 1, r = 1, \alpha = 2, \gamma = 2$ zu setzen und erhält die Abbildung:

$$z^2 = \frac{aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e}{(Z - C)^4} \tag{62}$$

5. Es sei das Flächenstück abzubilden, welches von der doppelt zählenden Hyperbel zwischen $z = a$ und $z = b$ begrenzt ist (Fig. 17). Wir setzen in Gleichung (30) $m = 2, \alpha_1' = \alpha_2' = 2$. Die Abbildung wird vermittelt durch die Transformation:

$$z^2 = \frac{aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma_1')]^2}. \tag{63}$$

6. Ein besonderes Interesse bietet die Abbildung des Flächenstückes, welches von zwei durch $z = 0$ gehenden Geraden eingeschlossen ist (Fig. 18). Ihr Winkel sei $\beta \cdot \pi$. In Gleichung (38) ist $l = 1, m = 0, r = 1, \beta_1 = \gamma_1 = \beta$ zu setzen. Man findet

$$z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{(Z - B)^{2\beta - 1} \cdot dZ}{(Z - C)^{2\beta + 1}} + C''$$

Da aber die Punkte $Z = B$ und $z = 0$ entsprechen, so ergibt sich die bekannte Abbildung:

$$z = a \cdot \left(\frac{Z - B}{Z - C}\right)^{\beta}. \tag{64}$$

Im folgenden betrachten wir die interessantesten Fälle von Hyperbelpolygonen mit Spitzen.

7. Es ist ein von zwei Hyperbelästen mit denselben Asymptoten begrenztes Flächenstück gegeben (Fig. 19). In Formel (35) ist $m = 0, r = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ zu setzen, so dass sich die gesuchte Abbildung ergibt als

$$z^2 = a \cdot \log\left(\frac{Z - C_1}{Z - C_2}\right) + b \tag{65}$$

8. In Figur 20 seien die Coordinatenachsen die Asymptoten beider Hyperbeln; bei a und b seien Winkel von $\frac{\pi}{2}$. Das Flächenstück $a, 0, b, i\infty, a$ wird durch Gleichung (38) abgebildet, wenn wir in derselben $m = 2, l = 1, r = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 0$ setzen. Hieraus ergibt sich durch Integration die Abbildung:

$$z^2 = a \cdot \log \left[\frac{2\alpha + \gamma (Z-C)}{2 (Z-C) \sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}}{Z-C} \right] \qquad (66)$$

wenn $\alpha = (C-A_1)(C-A_2)$

$\gamma = 2C - A_1 - A_2$ gesetzt wird.

9. In Figur 20 sei der Raum b, 0, $+\infty$, b abzubilden. Es ist in Gleichung (38) $m = 1$, $l = 1$, $r = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = 0$ zu setzen.

Man erhält hiedurch die Abbildung:

$$z^2 = a \cdot \log \left[\frac{2\alpha - \gamma (Z-C)}{2 (Z-C) \sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{(Z-A)(Z-B)}}{Z-C} \right] + b \qquad (67)$$

Hiebei ist:

$$\alpha = (C-A)(C-B)$$

$$\gamma = 2C - A - B$$

10. In Figur 20 soll der Raum $-\infty$, a, 0, b, $+\infty$, welcher auf der negativen Seite der Y Achse liegt, abgebildet werden. Indem wir in Gleichung (38) $m = 2$, $l = 1$, $r = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = 1$ setzen, finden wir die Abbildung vermittelt durch die Transformation:

$$z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{(Z-B)^2 \cdot dZ}{(Z-C)^3 \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}} + C''$$

Die Integration ergibt:

$$z^2 = a \cdot \left\{ \frac{2\alpha\beta + (8\alpha - 3\beta\gamma)\beta (Z-C)}{(Z-C)^2} \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)} \right.$$

$$\left. + M \cdot \log \left[\frac{2\alpha + \gamma (Z-C)}{2\sqrt{\alpha} (Z-C)} + \frac{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}}{Z-C} \right] \right\} + b \qquad (68)$$

Dabei ist

$$\alpha = (C-A_1)(C-A_2); \quad \beta = C-B;$$

$$\gamma = 2C - A_1 - A_2; \qquad M = \frac{8\alpha^2 - 8\alpha\beta\gamma - 4\alpha\beta^2 + 3\beta^2\gamma^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

11. Bildet man den Raum $-\infty$, a, 0, b, $+\infty$ der Figur 20 ab, welcher auf der positiven Seite der Y Achse liegt, so ist in Gleichung (38) $m = 2$, $l = 1$, $r = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ zu setzen.

Man erhält die Abbildung:

$$z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)} \cdot dZ}{(Z-C)^3} + C''$$

Bei der Bezeichnungsweise der vorigen Nummer gibt die Integration das Resultat:

$$z^2 = a \cdot \left\{ \frac{2\alpha+\gamma(Z-C)}{(Z-C)^2} \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)} + \frac{4\alpha-\gamma^2}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \log \left[\frac{2\alpha+\gamma(Z-C)}{2\sqrt{\alpha}(Z-C)} + \frac{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}}{(Z-C)} \right] \right\} + b \tag{69}$$

12. In Figur 21 sei das Flächenstück $0, -\infty, +i\infty, +\infty, 0$ abzubilden. In Gleichung (38) ist $m = 0$, $l = 1$, $r = 3$, $\beta = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ zu setzen. Man findet das Resultat

$$z^2 = a \cdot \log \left[(Z-C_1)^{\alpha_1} \cdot (Z-C_2)^{\alpha_2} \cdot (Z-C_3)^{\alpha_3} \right] + b \tag{70}$$

wenn $\alpha_1 = \dfrac{B-C_1}{(C_1-C_2)(C_1-C_3)}$ u. s. w. gesetzt wird.

13. In Figur 23 ist das Innere des Flächenstückes $0, a, i\infty, -\infty, b, 0$ abzubilden. Die Gleichung (38) bewirkt dies für $m = 2$, $l = 1$, $r = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Man erhält

$$z^2 = C' \cdot \int_0^Z \frac{(Z-B) \cdot dZ}{(Z-C_1)(Z-C_2) \cdot \sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)}} + C'' \tag{71}$$

Die Integration kann leicht ausgeführt werden.

Die Formel (38) vermittelt auch folgende Abbildungen:

a) Figur 22. Flächenstück $0, +\infty, +i\cdot\infty, -\infty, -i\infty, 0$. Man erhält:

$$z^2 = a \cdot \log \left[(Z-C_1)^{\alpha_1} \cdot (Z-C_2)^{\alpha_2} \cdot (Z-C_3)^{\alpha_3} \cdot Z-C_4)^{\alpha_4} \right] + b \tag{71a}$$

$$\text{wenn } \alpha_i = \frac{(C_i-B)^2}{(C_i-C_\mu)(C_i-C_\nu)(C_i-C_\varrho)} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, \\ \mu = 2, 3, 4, 1, \\ \nu = 3, 4, 1, 2, \\ \varrho = 4, 1, 2, 3. \end{cases}$$

b) Figur 24. Flächenstück $0, a, +i\cdot\infty, -\infty, -i\infty, b, 0$. Man erhält:

$$z^2 = a \cdot \log \left\{ \prod_{i=1}^{3} \left[\frac{2\alpha_i + \gamma_i (Z - C_i)}{2\sqrt{\alpha_i}\,(Z - C_i)} + \frac{\sqrt{(Z - A_1)(Z - A_2)}}{Z - C_i} \right]^{k_i} \right\} + b \quad (71\,b)$$

für $\alpha_i = (C_i - A_1)(C_i - A_2)$
$\gamma_i = 2C_i - A_1 - A_2$
$k_i = \dfrac{(C_i - B)^2}{(C_i - C_\mu)(C_i - C_\nu) \cdot \sqrt{\alpha_i}}$

$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \\ \mu = 2, 3, 1. \\ \nu = 3, 1, 2. \end{array} \right.$

Es ist zu bemerken, dass bei allen aufgestellten Abbildungsformeln durch spezielle Wahl der Bildpunkte, d. h. durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten im allgemeinen eine ausserordentliche Vereinfachung derselben erzielt werden kann. Hiefür bietet folgende Abbildung ein Beispiel.

14. Es sei das Innere des Flächenstückes abzubilden, welches von beiden konjugierten Hyperbeln mit den Coordinatenachsen als Asymptoten eingeschlossen wird (Fig. 25). In Formel (37) ist $m = 0$, $r = 4$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ zu setzen. Die Abbildung auf die Halbebene ist vermittelt durch die Transformation:

$$z^2 = a \cdot \log \left[(Z - C_1)^{\alpha_1} \cdot (Z - C_2)^{\alpha_2} \cdot (Z - C_3)^{\alpha_3} \cdot (Z - C_4)^{\alpha_4} \right] + b \quad (72)$$

wenn $\alpha_i = \dfrac{(C_i - \Gamma)(C_i - \Gamma_1)}{(C_i - C_\mu)\, C_i - C_\nu)\, C_i - C_\varrho)}$

$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4. \\ \mu = 2, 3, 4, 1, \\ \nu = 3, 4, 1, 2, \\ \varrho = 4, 1, 2, 3. \end{array} \right.$

Lässt man hier die Punkte einander entsprechen:

$z =$	$\zeta =$
0	0
$+\infty$	$+1$
$-\infty$	-1
$+i\infty$	$+i$
$-i\infty$	$-i$

so erhält man zur Abbildung auf den Einheitskreis die einfache Transformation:

$$z^2 = a \cdot \log \left(\frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \right) + b. \quad (73)$$

Die Abbildungen (9) bis (14) lassen sich leicht durch Betrachtung des Verlaufes der Funktion in beiden Ebenen verifizieren.

§ 10.

Zusammenstellung der wichtigsten Abbildungen von Flächenstücken, die von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkt begrenzt werden.

Die Bezeichnung ist die bisher angewandte.

I. Abbildung auf die Halbebene.

1. Ein geschlossenes Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art, Nullpunkt im Innern.

Abbildung des Innern (22):

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot (Z - \Gamma) \cdot (Z - \Gamma_1) \cdot dZ + C'.$$

2. Abbildung des Aeussern (28):

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} + C'.$$

3. Ein geschlossenes Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art, Nullpunkt nicht im Innern.

Abbildung des Innern (24):

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ + C'.$$

4. Abbildung des Aeussern (30):

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot (Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1) \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} + C'.$$

5. Ein geschlossenes Hyperbelpolygon mit m Ecken erster, l Ecken zweiter Art.

Abbildung des Innern (26):

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B_\lambda)^{2\beta_\lambda - 1} \cdot dZ + C'.$$

6. Abbildung des Aeussern (32):

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B'_\lambda)^{2\beta'_\lambda - 1} \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma'_1)]^3} + C'.$$

7. Ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster, r Ecken dritter Art, Nullpunkt nicht im Innern. (35)

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{2\gamma_\varrho + 1}} + C'.$$

8. Ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster, r Ecken dritter Art, Nullpunkt im Innern. (37)

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot (Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1) \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{2\gamma_\varrho + 1}} + C'.$$

9. Ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art. (38)

$$z^2 = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B_\lambda)^{2\beta_\lambda - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{2\gamma_\varrho + 1}} + C'.$$

II. Abbildung auf den Einheitskreis.

10. Ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art, Nullpunkt im Innern.

Abbildung des Innern (39):

$$z^2 = C \cdot \int_0^\zeta \prod_{\mu=1}^{m} (\zeta - e^{i\psi_\mu})^{\alpha_\mu - 1} \cdot \zeta \cdot d\zeta + C'.$$

11. Abbildung des Aeussern (40):

$$z^2 = C \cdot \int_0^\zeta \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (\zeta - e^{i\psi'_\mu})^{\alpha'_\mu - 1} \cdot d\zeta}{[(\zeta - \varrho_1 \cdot e^{i\vartheta})(1 - \zeta \cdot \varrho_1 \cdot e^{-i\vartheta})]^3} + C'.$$

12. Ein symmetrisches Hyperbelpolygon, von m Hyperbeln gebildet, $z = 0$ und $\zeta = 0$ entsprechen einander.

Abbildung des Innern (42):

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \prod_{\mu=1}^{m} (s - e^{2i\psi_\mu})^{\alpha_\mu - 1} \cdot ds + C'.$$

13. Abbildung des Aeussern (43), wenn $\zeta = 0$ und $z = \infty$ sich entsprechen:

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (s - e^{2i\psi'_\mu})^{\alpha'_\mu - 1} \cdot ds}{s^2} + C'.$$

14. Ein reguläres Hyperbelpolygon, von m Hyperbeln gebildet. Abbildung des Innern, wenn $\zeta = 0$ und $z = 0$ sich entsprechen (44):

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{ds}{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}} + C'.$$

15. Abbildung des Aeussern, wenn $\zeta = 0$ und $z = \infty$ sich entsprechen (45):

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta^2} \frac{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}}{s^2} \cdot ds + C'.$$

16. Abbildung eines regulären Hyperbelpolygons, dessen Begrenzung aus lauter durch den Nullpunkt gehenden Geraden besteht (59):

$$z^2 = C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{\zeta^m - 1}{(\zeta^m + 1)^{\frac{m-4}{m}}} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^3} + C'.$$

Hiezu vergleiche man die in den §§ 8 und 9 aufgeführten, vollständig durchführbaren Fälle.

II. Abschnitt.

Conforme Abbildung eines von gewissen Kurven n^{ter} und $2n^{ter}$ Ordnung begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene und den Einheitskreis.

§ 1.

Abbildung eines von regulären Hyperbeln $n$ter Ordnung mit gemeinsamen Mittelpunkt begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene und den Einheitskreis.

I.

Setzt man in Gleichung (1) des § 1 I. Abschnitt $\varphi(z) = z^n$, so erhält man die Gleichung einer regulären Hyperbel $n$ter[1]) Ordnung mit dem Nullpunkte als Centrum:

$$\alpha z^n + \alpha_1 z_1^n + \beta = 0 \qquad (74)$$

Zunächst stellen wir uns die Aufgabe, die den Winkelrelationen (12 bis 18) der gewöhnlichen Hyperbelpolygone entsprechenden Beziehungen für die hier auftretenden Polygone zu finden. Hiebei übertragen wir die Bezeichnungen als Ecken erster, zweiter, dritter Art und Spitzen, wie sie im ersten Abschnitt angewendet wurden, auf die folgenden Betrachtungen.

Um die Winkelsumme eines geschlossenen Hyperbelpolygons $n$ter Ordnung zu finden, welches den Punkt $z = 0$ im Innern und nur Ecken erster Art enthält, setzen wir $z^n = t$.

Durch diese Transformation geht jedes Hyperbelstück in eine geradlinige Strecke über. Da aber die t Ebene n blättrig ist, so mögen im ersten Blatte α Ecken, im zweiten Blatte β Ecken u. s. w.,

[1]) Ueber die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurven und ihre Gestalt vergleiche man: Holzmüller: „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.“ Cap. IX. — Ueber die verschiedenen Arten der „Hyperbelpolygone $n$ter Ordnung“, wie wir sie kurz nennen wollen, vergleiche man § 2, I. Abschnitt.

im $n$ten Blatt rEcken liegen (Fig. 28). Aus der Conformität der Abbildung (singuläre Punkte sind nur $t = 0$ und $t = \infty$) folgt, dass die Polygonswinkel der t Ebene gleich den entsprechenden der z Ebene sind.

Ist m die Anzahl der Ecken, so behaupten wir, die Winkelsumme dieser Figur ist

$$(m - 2n) \cdot \pi.$$

Angenommen diese Formel ist für $n = n'$ richtig, so nehmen wir zu den n' Blättern noch ein $(n' + 1)$stes Blatt hinzu. Ist die Zahl der hinzukommenden Ecken ϱ, so ist die Gesamtzahl der Polygonsecken, da die Ecke N fortfällt, $m + \varrho - 1 = m'$. Die Figur zeigt, dass die Winkelsumme der neuen Figur

W.S. = Winkelsumme der alten Figur $+ (\varrho - 2)\pi - \alpha - \beta - \gamma$ oder auch: W.S. $= (m + \varrho - 1)\pi - 2(n' + 1)\pi = \{m' - 2(n' + 1)\}\pi$ d. h. die aufgestellte Formel ist für $n = n' + 1$ richtig, wenn sie für $n = n'$ richtig. Da ihre Wahrheit aber für $n = 2$ evident ist (§ 2, I. Abschnitt), so gilt sie allgemein.

Die Summe der äusseren Winkel eines derartigen Polygons ist deshalb $(m + 2n)\pi$.

Berücksichtigt man, dass ein Winkel zweiter oder dritter Art, da $t = 0$ und $t = \infty$ die Verzweigungspunkte der t Ebene sind, in den $n$fachen Winkel übergeht, so ergeben sich durch die gleiche Methode wie oben folgende Relationen zwischen den Winkeln eines Hyperbelpolygons $n$ter Ordnung.

Ein Polygon mit m Ecken erster, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art sei hiebei durch das Symbol $[m, l, r]$ charakterisiert.

1. $[m, 0, 0]$; Nullpunkt im Innern.

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m - 2n \tag{75}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu = m + 2n \tag{75a}$$

2. $[m, 0, 0]$; Nullpunkt nicht im Innern.

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = m - 2 \tag{76}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu = m + 2 \tag{76a}$$

3. $[m, l, 0]$; $z = \infty$ nicht im Innern.

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu + n \cdot \sum_{\lambda}^{l} \beta_\lambda = m + l - 2 \tag{77}$$

4. $[m, l, 0]$; $z = \infty$ im Innern.

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu + n \cdot \sum_{\lambda=1}^{l} \beta'_\lambda = m + l + 2n \tag{78}$$

5. $[m, 0, r]$; Nullpunkt nicht im Innern.

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - n \cdot \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = m + r - 2 \tag{79}$$

6. $[m, 0, r]$; Nullpunkt im Innern.

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - n \cdot \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = m + r - 2n \tag{80}$$

7. $[m, l, r]$;

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu + n \cdot \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda - n \cdot \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = m + l + r - 2 \tag{81}$$

II.

Ist in der z Ebene ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art, deren Winkel $\alpha_\mu \cdot \pi$ und deren Bilder die reellen Punkte $Z = A_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3 \ldots m$) sind, so ist nach Gleichung (3) die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu}$$

längs der ganzen Begrenzung (resp. deren Bild) eindeutig und stetig, da die Forderung der Eindeutigkeit der Funktion $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ von selbst erfüllt ist.

Man kann direkt nachweisen, dass die Integralkurven der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = R(Z),$$

wenn $R(Z)$ eine rationale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt, nichts anderes als reguläre Hyperbeln n ter Ordnung mit dem Centrum $z = 0$ sind. Denn es ergibt sich durch Entwicklung:

$$\frac{(n-1)(x' + iy')}{x + iy} + \frac{x'' + iy''}{x' + iy'} = R(Z)$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären ist ferner:

$$R(Z) = \frac{(n-1)(x'^2 - y'^2) + x x'' - y y''}{x x' - y y'} = \frac{2(n-1)x'y' + x y'' + y x''}{x' y + x y'}$$

Durch Division mit $(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$ und nachherige Integration erhält man:

$$\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right) - \log\left(z_1^{n-1} \cdot \frac{dz_1}{dZ}\right) = \text{const.}$$

und mithin $\alpha z^n + \alpha_1 z_1^n + \beta = 0$, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Ausser den Ecken der Begrenzung sind nur die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ singuläre Stellen, wie die Entwicklung

$$z - g = \gamma_1 (Z - G) + \gamma_2 (Z - G)^2 + \ldots .$$

ergibt.

Soll das Innere des genannten Hyperbelpolygons abgebildet werden und ist der Punkt $Z = \Gamma$ das Bild des Punktes $z = 0$, so gilt für diese Stelle die Entwicklung

$$z = \gamma_1 (Z - \Gamma) + \gamma_2 (Z - \Gamma)^2 + \ldots .$$

d. h.

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{n-1}{Z - \Gamma} + \mathfrak{P}(Z - \Gamma) \qquad (82)$$

Da aus bekannten Gründen der Punkt $Z = \Gamma_1$ (Γ und Γ_1 sind konjugiert) in gleicher Weise wie $Z = \Gamma$ als singuläre Stelle auftritt, so ist die Funktion

$$\Phi = \frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \frac{n-1}{Z - \Gamma} - \frac{n-1}{Z - \Gamma_1}$$

im ganzen in Betracht kommenden Gebiet ($Y > 0$) holomorph und folglich konstant. Zum Beweis der Holomorphität der Funktion Φ an der Stelle $Z = \infty$ setzen wir $Z = \frac{1}{t}$ und entwickeln die Funktion an der Stelle $t = 0$. ($t = 0$ sei das Bild von $z = a$). Man hat

$$z - a = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots ;$$

mithin

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = -2t \cdot \mathfrak{P}(t).$$

Deshalb ist $\Phi = 0$ für $t = 0$ oder $Z = \infty$.

Diese Entwicklung zeigt zugleich, dass der constante Wert von Φ gleich Null ist, so dass für das betrachtete Gebiet die Gleichung gilt

$$\Phi = 0.$$

Die Integration gibt die Abbildung:

$$z^n = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot [(Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1)]^{n-1} \cdot dZ + C' \quad (83)$$

Der Punkt $Z = \Gamma$ kann beliebig gewählt werden.

Auch aus der Integralfunktion ergibt sich, dass $Z = \infty$ keine singuläre Stelle der Abbildung ist. Setzt man in (83) $Z = \frac{1}{t}$, so erhält man hiefür die Bedingung

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - m + 2n = 0.$$

Diese Bedingung ist nach Gleichung (75) erfüllt. Ist der Punkt $Z = \infty$ das Bild einer Ecke, so fällt aus den im I. Abschnitt § 3 erörterten Gründen in dem Produkt $\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1}$ der entsprechende Faktor ohne weiteres fort.

Hat das Polygon den Punkt $z = 0$ nicht im Innern, so ist die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu}$$

im betrachteten Gebiete holomorph, mithin konstant und zwar gleich Null. Die Abbildung wird in diesem Falle daher vermittelt durch die Transformation:

$$z^n = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ + C'. \quad (84)$$

Enthält endlich das Polygon m Ecken erster Art und l Ecken zweiter Art, welche von Geraden gebildet werden, so ist nach dem Schwarz'schen Theorem, wenn $\beta_\lambda \cdot \pi$ die entsprechenden Winkel und $Z = B_\lambda$ die den Ecken zweiter Art entsprechenden Bilder sind, für diese Stellen:

$$z = (Z - B_\lambda)^{\beta_\lambda} \cdot \mathfrak{P}(Z - B_\lambda).$$

Mithin ist

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{n\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda} + \mathfrak{P}(Z - B_\lambda). \quad (85)$$

Es ist also in diesem Falle die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha_\mu-1}{Z-A_\mu}-\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{n\beta_\lambda-1}{Z-B_\lambda}$$

im betrachteten Gebiete holomorph. Ihren constanten Wert ergibt die Betrachtung des Punktes $Z=\infty$ als Null. Die gesuchte Abbildung ist mithin vermittelt durch

$$z^n = C\cdot\int_0^z \prod_{\mu=1}^{m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}\cdot\prod_{\lambda=1}^{l}(Z-B_\lambda)^{n\cdot\beta_\lambda-1}\cdot dZ+C'. \quad (86)$$

III.

Ist das Aeussere eines Hyperbelpolygons mit m Ecken erster Art, $z=0$ im Innern, abzubilden, so liegt $z=\infty$ innerhalb des betrachteten Flächenstückes und ist deshalb eine in Betracht kommende singuläre Stelle. Ist $Z=\Gamma'$ dessen Bild, so gilt für diese Stelle die Entwicklung

$$z=\frac{1}{Z-\Gamma'}+\mathfrak{P}(Z-\Gamma').$$

Mithin ist:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]=-\frac{n+1}{Z-\Gamma'}+\mathfrak{P}(Z-\Gamma') \quad (87)$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Rolle des zu $Z=\Gamma'$ konjugierten Punktes $Z=\Gamma_1'$ ergibt sich somit, dass bei gewohnter Bezeichnungsweise in dem Gebiete $Y>0$ die Funktion

$$\Phi\equiv\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha_\mu'-1}{Z-A_\mu'}+\frac{n+1}{Z-\Gamma'}+\frac{n+1}{Z-\Gamma_1'}$$

holomorph ist. Ihre Holomorphität für $Z=\infty$ zeigt wieder die Transformation $Z=\frac{1}{t}$; man findet

$$\Phi=0 \text{ für } Z=\infty.$$

Die Gleichung $\Phi=0$ gilt mithin für das ganze in Betracht kommende Gebiet. Man erhält durch Integration die Abbildung

$$z^n=C\cdot\int_0^z\frac{\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A_\mu')^{\alpha_\mu'-1}\cdot dZ}{[(Z-\Gamma')(Z-\Gamma_1')]^{n+1}}+C'. \quad (88)$$

Die Forderung der Holomorphität für $Z = \infty$ gibt unter dem Integralzeichen die nach Gleichung (75a) erfüllte Bedingung

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha'_\mu - m - 2n = 0.$$

Der Punkt $Z = \Gamma' = A' + B'i$ ist nicht beliebig. Er ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Setzt man:

$$M = \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(\Gamma' - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1}}{(\Gamma' - \Gamma'_1)^{n+1}}$$

$$f_1 = \left[-\frac{n+1}{Z - \Gamma'_1} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha'_\mu - 1}{Z - A'_\mu} \right] Z = \Gamma'$$

$$f_2 = f_1^2 - \left[\frac{\partial f_1}{\partial Z} \right] Z = \Gamma'$$

. . . . . .

$$f_\varkappa = f_1 \cdot f_{\varkappa-1} - \left[\frac{\partial f_{\varkappa-1}}{\partial Z} \right] Z = \Gamma',$$

so ergibt sich für die in der Nähe von $Z = \Gamma'$ gelegenen Punkte durch Integration:

$$z^n = -C \cdot M \left[\frac{1}{n(Z-\Gamma')^n} + \frac{1}{n(n-1)(Z-\Gamma')^{n-1}} \cdot f_1 \right.$$
$$+ \frac{1 \cdot f_2}{n(n-1)(n-2)(Z-\Gamma')^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{n!(Z-\Gamma')} \cdot f_{n-1}$$
$$\left. + \frac{1}{n!} \cdot f_n \cdot \log(Z - \Gamma') + \mathfrak{P}(Z - \Gamma') \right]$$

Um das mit unendlicher Vieldeutigkeit an der Stelle $Z = \Gamma'$ verbundene logarithmische Unendlichwerden zu vermeiden, ist der Punkt $Z = \Gamma'$ so zu bestimmen, dass

$$f_n = 0 \quad \text{ist.} \tag{89}$$

Hieraus ergeben sich durch Separation des Reellen und Imaginären zwei Gleichungen zur Bestimmung von A' und B'.

Ist im Innern des abzubildenden Flächenstückes sowohl der Punkt $z = 0$ als auch der Punkt $z = \infty$ enthalten, so ist nach den Gleichungen (3), (82) und (87) die Funktion:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha'_\mu-1}{Z-A'_\mu}-\frac{n-1}{Z-\Gamma}-\frac{n-1}{Z-\Gamma_1}+\frac{n+1}{Z-\Gamma'}+\frac{n+1}{Z-\Gamma'_1}$$

im betrachteten Gebiete holomorph, so dass in bekannter Weise die Abbildung vermittelt wird durch

$$z^n = C\cdot\int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A'_\mu)^{\alpha'_\mu-1}\cdot[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)]^{n-1}\cdot dZ}{[(Z-\Gamma')(Z-\Gamma'_1)]^{n+1}}+C' \quad (90)$$

Die Forderung der Holomorphität für $Z=\infty$ ergibt die Bedingung

$$\sum_{\mu=1}^{m}\alpha'_\mu-m-2=0,$$

welche nach Gleichung (76a) erfüllt ist.

Der Punkt $Z=\Gamma'$ ist durch die zugehörige Gleichung $f_n=0$ bestimmt, wenn

$$f_1=\left[-\frac{n+1}{Z-\Gamma'_1}+\frac{n-1}{Z-\Gamma}+\frac{n-1}{Z-\Gamma_1}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha'_\mu-1}{Z-A'_\mu}\right]Z=\Gamma' \text{ ist.}$$

Enthält das Hyperbelpolygon m Ecken erster und l Ecken zweiter Art (zugehörige Winkel $\beta'_\lambda\cdot\pi$; zugehörige Bilder $Z=B'_\lambda$, $\lambda=1,2\ldots l$), so ist nach den Gleichungen (3), (85) und (87) im Gebiete $Y>0$ die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha'_\mu-1}{Z-A'_\mu}-\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{n\cdot\beta'_\lambda-1}{Z-B'_\lambda}+\frac{n+1}{Z-\Gamma'}+\frac{n+1}{Z-\Gamma'_1}$$

überall holomorph, konstant und zwar gleich Null. Man erhält also die Abbildung:

$$z^n = C\cdot\int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A'_\mu)^{\alpha'_\mu-1}\cdot\prod_{\lambda=1}^{l}(Z-B'_\lambda)^{n\beta'_\lambda-1}\cdot dZ}{[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma'_1)]^{n+1}}+C' \quad (91)$$

Damit $Z=\infty$ kein singulärer Punkt ist, muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\alpha'_\mu+n\sum_{\lambda=1}^{l}\beta'_\lambda-m-l-2n=0.$$

Sie ist nach Gleichung (78) in der That erfüllt. Der Punkt $Z=\Gamma'$ ist wieder durch $f_n=0$ bestimmt, wenn

$$f_1=\left[-\frac{n+1}{Z-\Gamma'_1}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha'_\mu-1}{Z-A'_\mu}+\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{n\beta'_\lambda-1}{Z-B'_\lambda}\right]Z=\Gamma'$$

IV.

Erstreckt sich das abzubildende Flächenstück in's Unendliche, so können die in § 5 I. Abschnitt klargelegten Fälle eintreten. Durch ganz analoge Schlussfolgerungen wie dort ergibt sich, dass für eine Ecke dritter Art mit dem Winkel $\gamma_\varrho \cdot \pi$ (gleich dem Asymptotenwinkel im Punkte $z = 0$), wenn deren Bild der reelle Punkt $Z = C_\varrho$ ist, die Entwicklung statthat:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = -\frac{n\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} + \mathfrak{P}(Z - C_\varrho) \qquad (92)$$

Hat das abzubildende Flächenstück m Ecken erster Art, r Ecken dritter Art ($\varrho = 1, 2 \ldots r$), den Punkt $z = 0$ nicht im Innern, so ist nach den bisherigen Erörterungen die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{n\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho}$$

im Gebiete $Y > 0$ holomorph, folglich konstant und zwar gleich Null.

Hieraus ergibt sich die Abbildung:

$$z^n = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1}} + C' \qquad (93)$$

Die Forderung der Holomorphität für $Z = \infty$ ergibt die nach Gleichung (79) thatsächlich erfüllte Bedingung:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu - n \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho - m - r + 2 = 0.$$

Enthält das Flächenstück den Punkt $z = 0$ im Innern, so ist zufolge den Gleichungen (3), (82) und (92) die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{n\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} - \frac{n-1}{Z - \Gamma} - \frac{n-1}{Z - \Gamma_1}$$

im betrachteten Gebiete holomorph, mithin constant und, nach öfter angewandten Schlüssen, gleich Null. Die Abbildung wird daher vermittelt durch:

$$z^n = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot [(Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1)]^{n-1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1}} + C' \qquad (94)$$

Hat endlich das abzubildende Flächenstück m Ecken erster, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art, so zeigen die Gleichungen (3), (85) und (92), dass im ganzen Gebiete $Y > 0$ die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{n-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{l}\frac{n\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda} + \sum_{\varrho=1}^{r}\frac{n\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho}$$

holomorph und konstant Null ist.

Wir erhalten hiedurch die Abbildung:

$$z^n = C\cdot\int_0^z \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}\cdot\prod_{\lambda=1}^{l}(Z-B_\lambda)^{n\beta_\lambda-1}\cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r}(Z-C_\varrho)^{n\gamma_\varrho+1}} + C' \qquad (95)$$

In Gleichung (94) und (95) erheischt die Conformität der Abbildung im Punkte $Z = \infty$ beziehungsweise die Erfüllung der Bedingungen:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu - n\sum_{\varrho=1}^{r}\gamma_\varrho - m - r + 2n = 0$$

und $$\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu + n\sum_{\lambda=1}^{l}\beta_\lambda - n\sum_{\varrho=1}^{r}\gamma_\varrho - m - l - r + 2 = 0.$$

Diese Bedingungen sind nach (80) und (81) erfüllt.

Ist in Gleichung (93), (94) und (95) für den Punkt $Z = C_\varkappa$ der Exponent $n\gamma_\varrho + 1 = k$ gleich einer ganzen Zahl, so führt die Integration auf Logarithmen. Er ist daher bestimmt durch die zugehörige Gleichung

$$f_{\varkappa-1} = 0.$$

Hiezu vergleiche man (36) und (89).

V.

Ist das Hyperbelpolygon ein symmetrisches, von m Hyperbeln gebildet, so hat dasselbe mn Ecken, von denen je n eine derartige symmetrische Lage zum Punkt $z = 0$ haben, dass die von ihnen nach dem Nullpunkt gehenden Radienvektoren gleiche Länge haben und gleiche Winkel bilden. Die Gleichung (83) liefert, wenn man berücksichtigt, dass die Winkelsumme eines derartigen Hyperbelpolygons $(mn - 2n)\pi$ ist, nach einigen Reduktionen zur Abbildung des Innern auf den Einheitskreis die Transformation:

$$z^n = C\cdot\int_0^\zeta \prod_{\mu=1}^{m}(s - e^{ni\psi_\mu})^{\alpha_\mu-1}\cdot ds + C' \qquad (96)$$

Hiebei ist $\zeta = e^{i\psi'_\mu}$ das Bild der ersten (von der reellen Achse an gerechnet) Ecke mit dem Winkel $\alpha_\mu \cdot \pi$; die Punkte $\zeta = 0$ und $z = 0$ sind zugeordnet. Die Abbildung des Aeussern eines symmetrischen von m Hyperbeln $n$ter Ordnung gebildeten Polygons auf das Innere des Einheitskreises geht nach Gleichung (88) hervor aus der Transformation:

$$z^n = C \cdot \int_0^{\zeta^n} \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (s - e^{ni\psi'_\mu})^{\alpha'_\mu - 1} \cdot ds}{s^2} + C' \qquad (97)$$

Hiebei entsprechen sich die Punkte $\zeta = 0$ und $z = \infty$, wie die Symmetrie lehrt und auch aus Gleichung (89) hervorgeht.

Ist das abzubildende Polygon ein reguläres, von m Hyperbeln gebildet, so ist $\alpha_\mu = \frac{m-2}{m}$, $\alpha'_\mu = \frac{m+2}{m}$. Nimmt man den Punkt $\zeta = +1$ als Bild einer Ecke und lässt bei Abbildung des Innern die Punkte $\zeta = 0$ und $z = 0$ entsprechen, so ergibt sich zur Abbildung des Innern die Transformation

$$z^n = C \cdot \int_0^{\zeta^n} \frac{ds}{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}} + C', \qquad (98)$$

Die Abbildung des Aeussern wird, da $\zeta = 0$ und $z = \infty$ einander entsprechen, vermittelt durch:

$$z^n = C \cdot \int_0^{\zeta^n} \frac{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}}{s^2} \cdot ds + C'. \qquad (99)$$

Es ist klar, dass bei Abbildung eines regulären Hyperbelpolygons auf den Einheitskreis die Symmetrielinien des Polygons in Symmetrielinien des Kreises übergehen. Es ist aber von Interesse, diese Eigenschaft der Abbildung aus der gewonnenen Formel abzuleiten.

Diese lautete für die Abbildung des Innern:

$$z^n = C \cdot \int_0^{\zeta^n} \frac{ds}{(1 - s^m)^{\frac{2}{m}}} + C'.$$

Da es sich um den Einheitskreis handelt, mithin abs $\zeta \leq 1$ ist, so kann der Nenner nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden, so dass man für $\mu = \left(-\frac{2}{m}\right)$ erhält:

$$z^m = C \cdot \left\{ \zeta^n + \binom{\mu}{1} \frac{\zeta^{nm+1}}{nm+1} + \binom{\mu}{2} \frac{\zeta^{2nm+1}}{2nm+1} + \ldots + (-1)^\nu \cdot \binom{\mu}{\nu} \cdot \frac{\zeta^{\nu nm+1}}{\nu nm+1} + \ldots \right\}_0^{\zeta^n} + C'.$$

Setzt man noch $(-1)^\nu \cdot \binom{\mu}{\nu} = a_\nu \cdot (\nu m + 1)$, so ist

$$z^m = C \cdot \{ \zeta^n + a_1 \zeta^{n(m+1)} + a_2 \cdot \zeta^{n(2m+1)} + \ldots + a_\nu \cdot \zeta^{n(\nu m+1)} + \ldots \} + C'$$

mithin auch:

$$\left| \begin{array}{l} r^m \cdot \cos n\varphi = C \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot \varrho^{n(\nu m+1)} \cdot \cos (\nu m + 1) \cdot n\psi \\ r^m \cdot \sin n\varphi = C \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot \varrho^{n(\nu m+1)} \cdot \sin (\nu m + 1) \cdot n\psi \end{array} \right. \qquad (A)$$

wenn wir C reell und $C' = 0$ nehmen, wodurch nichts Wesentliches in der Abbildung geändert wird.

Setzt man in A

1) $\varrho = 1, \psi = 0$, so ist $\left| \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ r^m = C \cdot (1 + a_1 + a_2 + \ldots) = C \cdot \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^m)^{\frac{2}{m}}} \end{array} \right.$

Ist der Abstand einer Ecke des Hyperbelpolygons vom Nullpunkt r_0, so ergibt sich hieraus, dass

$$C = \frac{r_0^m}{\int_0^1 \frac{ds}{(1-s^m)^{\frac{2}{m}}}}$$

zu setzen ist.

Setzt man 2) $\psi = \frac{2\pi \cdot k}{mn}$ und lässt ϱ beliebig, so ist, wenn σ eine ganze Zahl bedeutet:

$$\left| \begin{array}{l} \cos \frac{2\pi k}{mn} \cdot (\sigma m + 1) \cdot n = \cos \frac{2\pi k}{m} \\ \sin \frac{2\pi k}{mn} \cdot (\sigma m + 1) \cdot n = \sin \frac{2\pi k}{m} \end{array} \right.$$

und mithin zufolge A:

$$\left| \begin{array}{l} r^m \cdot \cos n\varphi = \cos \frac{2\pi k}{m} \cdot C \cdot \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \cdot \varrho^{(\nu m+1) \cdot n} \\ r^m \cdot \sin n\varphi = \sin \frac{2\pi k}{m} \cdot C \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot \varrho^{(\nu m+1) \cdot n} \end{array} \right.$$

Hieraus folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} r^n = C \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot \varrho^{(\nu m+1)\cdot n} \\ \varphi = \dfrac{2\pi k}{mn} \end{array}\right. \qquad (B)$$

d. h. jeder Geraden der z Ebene $\varphi = \dfrac{2\pi k}{mn}$ entspricht eine Gerade der ζ Ebene $\psi = \dfrac{2\pi k}{mn}$.

Setzt man 3) $\psi = \dfrac{(2k+1)\cdot\pi}{mn}$ und lässt ϱ beliebig, so ist:

$$\cos(\sigma m+1)\cdot n\cdot\frac{(2k+1)\pi}{mn} = (-1)^\nu\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}$$

$$\sin(\sigma m+1)\cdot n\cdot\frac{(2k+1)\pi}{mn} = (-1)^\nu\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}$$

folglich nach (A):

$$\left\{\begin{array}{l} r^n\cdot\cos n\varphi = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{m}\cdot C\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot a_\nu\cdot\varrho^{(\nu m+1)\cdot n} \\ r^n\cdot\sin n\varphi = \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{m}\cdot C\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot a_\nu\cdot\varrho^{(\nu m+1)\cdot n} \end{array}\right.$$

Hieraus folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} r^n = C\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot a_\nu\cdot\varrho^{(\nu m+1)\cdot n} \\ \varphi = \dfrac{(2k+1)\cdot\pi}{m\cdot n} \end{array}\right. \qquad (C)$$

d. h. jeder Geraden der z Ebene $\varphi = \dfrac{(2k+1)\pi}{mn}$ entspricht eine Gerade der ζ Ebene $\psi = \dfrac{(2k+1)\pi}{mn}$.

Es gehen also sämmtliche Symmetrielinien des Polygons in Durchmesser des Einheitskreises über. Aus den Gleichungen (B) und (C) können ferner die entsprechenden Punkte ζ und z der Symmetralachsen berechnet werden.

VI.

Aus dem Vorhergehenden lassen sich für eine Reihe von Abbildungen die Transformationsgleichungen integrieren. Hier seien die wichtigsten Resultate angegeben.

1) Ein reguläres Hyperbelpolygon $n$ter Ordnung, von 4 Hyperbeln gebildet, $4n$ Ecken, $\alpha_\mu = \frac{1}{2}$. Abbildung des Innern:

$$\zeta^n = \sin\text{am}\,\frac{z^n - C'}{C}\ ;\ \text{mod}\ \sqrt{-1}. \tag{100}$$

Für $C' = 0$, $C = 1$ sind die Polygonsecken die Punkte $z = i_\nu \cdot \sqrt[n]{K}$, $i_\nu \cdot \sqrt[n]{-K}$, $i_\nu \cdot \sqrt[n]{iK}$, $i_\nu \cdot \sqrt[n]{-iK}$, wenn $i_\nu\,(\nu = 1, 2 \ldots n)$ die n Wurzelwerthe von $\sqrt[n]{1}$ bedeutet.

Hiebei ist $$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}};\ \text{mod}\ \sqrt{-1}.$$

2) Hyperbelpolygon $n$ter Ordnung mit 4 rechtwinkligen Ecken erster Art, Nullpunkt nicht im Innern. Abbildung des Innern:

$$\zeta = \sin\text{am}\,\frac{z^n - C'}{C}\ ;\ \text{mod}\ \sqrt{-1}. \tag{101}$$

3) Polygon mit 3 rechtwinkligen Ecken erster Art, einer Ecke zweiter Art mit Winkel $\frac{\pi}{2n}$. Abbildung des Innern:

$$\zeta = \sin\text{am}\,\frac{z^n - C'}{C};\ \text{mod}\ \sqrt{-1}. \tag{102}$$

4) Polygon mit vier rechtwinkligen Ecken erster Art, einer Ecke zweiter Art mit dem Winkel $\frac{\pi}{n}$. Abbildung des Innern:

$$\frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} = \sin\text{am}\,\frac{z^n - C'}{C};\ \text{mod}\ \sqrt{-1}. \tag{103}$$

5) Das Aeussere des von einem Arm einer regulären Hyperbel n^{ter} Ordnung eingeschlossenen Flächenstückes wird auf die Halbebene abgebildet durch die Transformation:

$$z^n = C' \cdot \int_0^Z \frac{[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)]^{n-1} \cdot dZ}{(Z-C)^{2n}} + C''$$

Die Integration ergibt:

$$z^n = \frac{a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_{2n-1} \cdot Z^{2n-1}}{(Z-C)^{2n-1}} \tag{104}$$

Der Punkt $Z = C$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$f_{2n-1} = 0,$$

wenn $$f_1 = \left[\frac{n-1}{Z-\Gamma} + \frac{n-1}{Z-\Gamma_1}\right] Z = C \quad \text{ist.}$$

Wählt man den Punkt $Z = \Gamma$ so, dass $C = \infty$ wird, so lautet die Abbildung

$$z^n = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_{2n-1} \cdot Z^{2n-1} \tag{104a}$$

6) Das Innere des von einem Hyperbelarm eingeschlossenen Flächenstückes wird abgebildet durch die Transformation

$$z^n = \frac{aZ+b}{Z-C} \tag{105}$$

Ist $C = \infty$, so lautet die Abbildungstransformation:

$$z^n = a \cdot Z + b \tag{105a}$$

7) Ein Flächenstück sei von k Armen ein und derselben regulären Hyperbel n^{ter} Ordnung begrenzt. Je zwei aufeinanderfolgende Arme schliessen bekanntlich den Winkel $\frac{\pi}{n}$ ein. Die zur Begrenzung gehörigen Arme mögen die Winkel $\sigma_1 \cdot \frac{\pi}{n}$, $\sigma_2 \cdot \frac{\pi}{n} \ldots \sigma_\varkappa \cdot \frac{\pi}{n}$ der Reihe nach bilden, wobei $\sum_{\varkappa=1}^{k} \sigma_\varkappa = 2n-k$ ist.

Die Abbildungstransformation ist:

$$z^n = C \cdot \int_0^Z \frac{[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)]^{n-1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{k} (Z-C_\varkappa)^{\sigma_\varkappa+1}} + C'$$

Die Integration gibt:

$$z^n = \frac{a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_{2n-k} \cdot Z^{2n-k}}{\prod_{\varrho=1}^{k} (Z-C_\varkappa)^{\sigma_\varkappa}} \tag{106}$$

Die Constanten $C_\varkappa$ sind bestimmt durch die zugehörigen Gleichungen $f_{\sigma_\varkappa - 1} = 0$.

8) Das von zwei Armen zweier verschiedener Hyperbeln n^{ter} Ordnung begrenzte Flächenstück, welches den Nullpunkt nicht enthält, wird abgebildet durch die Transformation:

$$z^n = a\left(\frac{Z-A}{Z-C}\right)^{\alpha} + b. \tag{107}$$

Hiebei ist $\alpha \cdot \pi$ der Winkel der Ecke erster Art, $Z = A$ ihr Bild; der Punkt $Z = C$ ist das Bild der Ecke $z = \infty$.

9) Das von zwei Armen zweier verschiedener Hyperbeln n^{ter} Ordnung eingeschlossene Flächenstück, welches den Nullpunkt im Innern enthält, wird abgebildet durch:

$$z^n = C \cdot \int_0^s s^{\alpha-1} \cdot [(s-\gamma)(s-\gamma_1)]^{n-1} \cdot ds + C',$$

wenn $$s = \frac{Z-A}{Z-C}.$$

Die Integration gibt:

$$z^n = \sum_{k=\alpha}^{\alpha+2n-2} A_k \left(\frac{Z-A}{Z-C}\right)^k + B \tag{108}$$

Hiebei ist $\alpha \cdot \pi$ der Winkel erster Art.

10) Das Flächenstück, welches von zwei Armen zweier Hyperbeln gebildet wird und das keine Ecke erster Art, mithin zwei Ecken dritter Art mit den Winkeln $\alpha \cdot \pi$ (Bild $Z = C_1$) und $(2n - \alpha n - 2)\pi$ (Bild $Z = C_2$) besitzt, wird abgebildet durch:

$$z^n = C \cdot \int_0^s [(s-\gamma)(s-\gamma_1)]^{n-1} \cdot s^{n\alpha+1-2n} \cdot ds + C'$$

wenn $s = \dfrac{Z-C_2}{Z-C_1}$ ist.

Die Integration liefert:

$$z^n = \sum_{k=n\cdot\alpha+2-2n}^{n\alpha} A_k \cdot \left(\frac{Z-C_2}{Z-C_1}\right)^k + B \tag{109}$$

11) Ein Hyperbelpolygon mit zwei rechtwinkligen Ecken erster Art (Bildpunkte $Z = A_1$ und $Z = A_2$), einer Ecke dritter Art mit dem Winkel $\dfrac{2n-2}{n} \cdot \pi$ (Bildpunkt $Z = C$); Nullpunkt im Innern. Die Abbildung ist vermittelt durch:

$$z^n = C' \cdot \int_0^Z \frac{[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)]^{n-1} \cdot dZ}{(Z-C)^{2n-1} \cdot \sqrt{(Z-A_1)\cdot(Z-A_2)}} + C'' \tag{110}$$

Setzt man $Z - C = \dfrac{1}{t}$, so erhält man:

$$z^n = C_1 \cdot \int_0^t \frac{[(t-\gamma)\,(t-\gamma_1)]^{n-1} \cdot dt}{\sqrt{(t-\alpha_1)\,(t-\alpha_2)}} + C_1 \qquad (110\,a)$$

Dies Integral kann immer ausgewertet werden. Der Punkt $Z = C$ ist bestimmt durch die Gleichung $f_{2n-2} = 0$, wenn

$$f_1 = \left[\frac{n-1}{Z-\Gamma} + \frac{n-1}{Z-\Gamma_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z-A_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z-A_2} \right] Z = C$$

12) Ein Hyperbelpolygon mit zwei Winkeln $\frac{3}{2} \cdot \pi$ erster Art (Bildpunkte $Z = A_1$ und $Z = A_2$), einem Winkel $\frac{2}{n} \cdot \pi$ dritter Art (Bild $Z = C$); Nullpunkt nicht im Innern. Die Abbildung ist vermittelt durch:

$$z^n = C' \cdot \int_0^Z \frac{dZ \cdot \sqrt{(Z-A_1)\,(Z-A_2)}}{(Z-C)^3} + C'' \qquad (111)$$

Setzt man $Z - C = \frac{1}{t}$, so ergibt sich leicht:

$$z^n = a \cdot \frac{2\alpha - \gamma\,(Z-C)}{(Z-C)^2} \cdot \sqrt{(Z-A_1)\,(Z-A_2)} + b \qquad (111\,a)$$

Der Punkt $Z = C$ ist bestimmt durch die Gleichungen

$$4\alpha = \gamma^2.$$

Hiebei ist $\alpha = (C-A_1)\,(C-A_2)$; $\gamma = 2\,C - A_1 - A_2$.

§ 2.

Abbildung eines von confocalen Parabeln $n$ter Ordnung begrenzten Flächenstückes.

Setzt man in Gleichung (1) $\varphi(z) = z^{\frac{1}{n}}$, so erhält man die Gleichung einer Parabel $n$ter Ordnung mit dem Brennpunkt $z = 0$

$$\alpha z^{\frac{1}{n}} + \alpha_1 z_1^{\frac{1}{n}} + \beta = 0 \qquad (112)$$

Die in § 1, I. Abschnitt für $\varphi(z)$ aufgestellte Bedingung, dass $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ eindeutig ist, ist hier von selbst erfüllt.

Das Parabelpolygon enthalte den Nullpunkt im Innern. Nach Gleichung (3) ist die Funktion

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha_\mu-1}{Z-A_\mu}$$

längs der ganzen Begrenzung eindeutig und stetig, da diese nur m Ecken erster Art besitzt.

Ist sodann $Z=\Gamma$ das Bild des Punktes $z=0$, so entspricht ihm nach dem Schwarz'schen Satz die Entwicklung:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]=\frac{\frac{1}{n}-1}{Z-\Gamma}+\mathfrak{P}(Z-\Gamma).$$

Mithin ist die Funktion:

$$\Phi=\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\alpha_\mu-1}{Z-A_\mu}-\frac{\frac{1}{n}-1}{Z-\Gamma}-\frac{\frac{1}{n}-1}{Z-\Gamma_1},$$

wenn die bekannte Rolle des Punktes $Z=\Gamma_1$ berücksichtigt wird, im ganzen Gebiete $Y>0$ holomorph und mithin constant. Ferner ergibt sich durch Anwendung der bei ähnlichen Ueberlegungen schon öfter eingeführten Transformation $Z=\frac{1}{t}$, dass $\Phi=0$ für $Z=\infty$. Mithin gilt für das in Betracht kommende Gebiet die Gleichung

$$\Phi=0.$$

Die Integration ergibt die die Abbildung vermittelnde Transformation:

$$z^{\frac{1}{n}}=C\cdot\int_0^Z\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}\cdot[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)]^{\frac{1}{n}-1}\cdot dZ+C' \quad (113)$$

Die Abbildung des Aeussern des genannten Parabelpolygon- ergibt sich durch analoge Betrachtungen. Ist $Z=\Gamma'$ das Bild des Punktes $z=\infty$, so ergibt sich, dass die Abbildung des Aeussern vermittelt ist durch:

$$z^{\frac{1}{n}}=C\cdot\int_0^Z\frac{\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A'_\mu)^{\alpha'_\mu-1}\cdot dZ}{[(Z-\Gamma')(Z-\Gamma'_1)]^{\frac{1}{n}+1}}+C'. \quad (114)$$

Liegt weder $z=0$ noch $z=\infty$ im Innern des abzubildenden Flächenstückes, so ist die Abbildung vermittelt durch:

$$z^{n}=C\cdot\int_0^Z\prod_{\mu=1}^{m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}\cdot dZ+C'. \quad (115)$$

Hat das Parabelpolygon eine Ecke zweiter Art mit dem Winkel $\beta_\lambda \cdot \pi$ (von zwei Geraden gebildet, zugehöriger Bildpunkt $Z = B_\lambda$), so hat an dieser Stelle nach Schwarz die Entwicklung statt:

$$z = (Z - B_\lambda)^{\beta_\lambda} \cdot \mathfrak{P}(Z - B_\lambda),$$

d. h. es ist an dieser Stelle:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = \frac{\frac{1}{n}\beta_\lambda - 1}{Z - B_\lambda} + \mathfrak{P}(Z - B_\lambda). \qquad (116)$$

Das Verhalten der Parabel an dem Punkte $z = \infty$ bedarf einer besonderen Erörterung.[1])

Macht man die Transformation $z = \frac{1}{\zeta}$, so entspricht dem Innern der Parabel $\alpha z^{\frac{1}{n}} + \alpha_1 z_1^{\frac{1}{n}} + \beta = 0$ das Aeussere der cardioidischen Kurve:

$$\zeta^{\frac{1}{n}} \cdot \zeta_1^{\frac{1}{n}} + \frac{\alpha_1}{\beta}\zeta^{\frac{1}{n}} + \frac{\alpha}{\beta}\zeta_1^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Diese letztere besitzt aber im Nullpunkt nach innen eine Spitze und da die Punkte $\zeta = 0$ und $z = \infty$ entsprechen, so besitzt jede Parabel im Unendlichen im Innern eine Spitze (Winkel 0^0) d. h. sie berührt ihre Symmetralachse im Unendlichen zu beiden Seiten.

Bilden nun zwei verschiedene Parabeln im Punkte $z = \infty$ einen Winkel, so ist sofort klar, dass dieser Winkel gleich dem Winkel der beiden Symmetralachsen der Parabeln im Punkte $z = 0$ ist. Ist $Z = C_\varrho$ das Bild des Scheitels einer Ecke dritter Art mit dem Winkel $\gamma_\varrho \cdot \pi$, so gilt für diesen Punkt nach dem Schwarz'schen Satz die Entwicklung:

$$z = \frac{1}{(Z - C_\varrho)^{\gamma_\varrho}} \cdot \mathfrak{P}(Z - C_\varrho)$$

d. h.

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(z^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)\right] = -\frac{\frac{1}{n}\gamma_\varrho + 1}{Z - C_\varrho} + \mathfrak{P}(Z - C_\varrho). \qquad (117)$$

Hieraus ergeben sich nach Massgabe der bisher angewandten Schlüsse ohne weiteres folgende Resultate:

---

[1]) Zuerst bemerkt von Herrn F. Lindemann: „Die analytische Fortsetzung derjenigen Funktionen u. s. w." 13.

1) Das Parabelpolygon enthält m Ecken erster, l Ecken zweiter Art, den Punkt $z = \infty$ nicht im Innern. Die Abbildung wird vermittelt durch:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B_\lambda)^{\frac{1}{n}\beta_\lambda - 1} \cdot dZ + C'. \quad (118)$$

2) Das Parabelpolygon enthält m Ecken erster, l Ecken zweiter Art, den Punkt $z = \infty$ im Innern (Bildpunkt $Z = \Gamma'$). Die Abbildung ist:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A'_\mu)^{\alpha'_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B'_\lambda)^{\frac{1}{n}\beta'_\lambda - 1} \cdot dZ}{[(Z - \Gamma')(Z - \Gamma_1)]^{\frac{1}{n}+1}} + C'. \quad (119)$$

3) Das Parabelpolygon hat m Ecken erster, r Ecken dritter Art; Punkt $z = 0$ nicht im Innern. Die Abbildungstransformation ist:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{\frac{1}{n}\gamma_\varrho + 1}} + C'. \quad (120)$$

4) Das Parabelpolygon hat m Ecken erster, r Ecken dritter Art, Punkt $z = 0$ im Innern. Die Abbildung ist vermittelt durch:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot [(Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1)]^{\frac{1}{n}-1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{\frac{1}{n}\gamma_\varrho + 1}} + C'. \quad (121)$$

5) Das Parabelpolygon enthält m Ecken erster, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art. Die Abbildung ist vermittelt durch:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (Z - B_\lambda)^{\frac{1}{n}\cdot\beta_\lambda - 1} \cdot dZ}{\prod_{\varrho=1}^{r} (Z - C_\varrho)^{\frac{1}{n}\gamma_\varrho + 1}} + C' \quad (122)$$

6) Für ein reguläres Parabelpolygon mit m Ecken erster Art ergibt sich zur Abbildung des Innern, wenn $\zeta = 0$ und $z = 0$ einander entsprechen:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^{\zeta^{\frac{1}{n}}} \frac{ds}{(1-s^{mn})^{\frac{2}{mn}}} + C' \qquad (123)$$

und zur Abbildung des Aeussern, da $\zeta = 0$ und $z = \infty$ entsprechende Punkte sind:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^{\zeta^{\frac{1}{n}}} \frac{(1-s^{mn})^{\frac{2}{mn}}}{s^2} \cdot ds + C' \qquad (124)$$

Hierbei muss berücksichtigt werden, dass die Summe der Innenwinkel eines Parabelpolygons mit nur Winkeln erster Art gleich $\left(m - \frac{2}{n}\right)\pi$, die Summe der äussern Winkel $\left(m + \frac{2}{n}\right)\pi$ beträgt. Diese Beziehungen nebst vielen anderen Winkelrelationen können durch dieselbe Methode, wie wir sie bei Hyperbelpolygonen angewendet haben, gewonnen werden.

7) Setzt man speziell in Gleichung (123) $m = n = 2$, so ergibt sich die Transformation:

$$\zeta^{\frac{1}{2}} = \sin \operatorname{am} \frac{z^{\frac{1}{2}} - C'}{C}; \text{ mod } \sqrt{-1},$$

welche ein von zwei Parabeln zweiter Ordnung mit gemeinsamen Brennpunkt eingeschlossenes Flächenstück mit zwei rechtwinkligen Ecken abbildet. Für $C' = 0$, $C = 1$ gibt die Tabelle IV die entsprechenden Coordinatenwerte beider Ebenen, die Tafel II Fig. 4 die hieraus konstruierten Figuren. Die Ecken des Parabelzweiecks sind die Punkte $z = \pm K^2$; $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$; mod $\sqrt{-1}$.

8) Bilden wir das Innere des von einer Parabel $n$ter Ordnung begrenzten Flächenstückes ab, so ist in Formel (121) $m = 0$, $r = 1$, $\gamma = 0$ zu setzen und wir erhalten

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^Z \frac{[(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)]^{\frac{1}{n}-1} \cdot dZ}{(Z-C)} + C' \qquad (125)$$

Ebenso ergibt sich die Abbildung des Aeussern einer Parabel $n$ter Ordnung aus Gleichung (120), wenn man dort $m = 0$, $r = 1$, $\gamma = 2$ setzt. Man findet:

$$z^{\frac{1}{n}} = C \cdot \int_0^z \frac{dZ}{(Z-C)^{\frac{n+2}{n}}} + C' \qquad (126)$$

Die Integration liefert:

$$z^{\frac{1}{n}} = \frac{\alpha}{(Z-C)^{\frac{2}{n}}} + b \qquad (126\,a)$$

Wählt man speziell $C = \infty$, so erhält man die einfache Abbildung:

$$z^{\frac{1}{n}} = a\,Z + b. \qquad (126\,b)$$

Die Abbildung des Innern einer gewöhnlichen Parabel gibt Gleichung (125) für $n = 2$. Man findet leicht:

$$z^{\frac{1}{2}} = a \cdot \log\left[\frac{2\alpha + \gamma\,(Z-C)}{2\sqrt{\alpha}(Z-C)} + \frac{\sqrt{(Z-\Gamma)(Z-\Gamma_1)}}{Z-C}\right] + b \qquad (127)$$

Hiebei ist: $\alpha = (C-\Gamma)(C-\Gamma_1)$; $\gamma = 2C-\Gamma-\Gamma_1$.

Lässt man die Punkte $z = \infty$ und $Z = \infty$, ferner $z = 0$ und $Z = i$ entsprechen, so ergibt sich die bekannte Abbildung des Innern einer Parabel durch die Transformation:

$$z^{\frac{1}{2}} = a \cdot \log\,(Z + \sqrt{1+Z^2}) + b, \qquad (127\,a)$$

welche nach Uebergang zum Einheitskreis der ζ Ebene mit der von Schwarz[1]) hiefür gegebenen Formel übereinstimmt.

Es sei bemerkt, dass man die Abbildung von Flächenstücken, welche von irregulären Hyperbeln[2]) begrenzt werden, aus den für Parabeln $n$ter Ordnung gegebenen Formeln erhält, wenn man $\frac{1}{n}$ durch $\frac{p}{q}$ ersetzt.

§ 3.

Abbildung eines von concentrischen regulären Lemniskaten $2n$ter Ordnung begrenzten Flächenstückes.

Setzt man in Gleichung (5) $\varphi(z) = z^n$, so erhält man die Gleichung einer regulären Lemniskate $2n$ter Ordnung mit dem Mittelpunkt $z = 0$:

$$z^n \cdot z_1^n + \alpha\,z^n + \alpha_1 z_1^n + \beta = 0. \qquad (128)$$

Die Bedingung, welcher die Funktion $\varphi(z)$ nach § 1 I. Abschnitt zu genügen hat, ist von selbst erfüllt.

[1]) Crelle Journal, Bd. 70, pag. 115.
[2]) Conf. Holzmüller, l. c. Cap. XI.

Nach Gleichung (7) ist die Funktion

$$\left\{z^n,\ Z\right\} - \sum_{\mu=1}^{m}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right\}$$

längs der ganzen Begrenzung (resp. deren Bild) des Lemniskatenpolygons, wenn dasselbe nur m Ecken erster Art besitzt, holomorph.

Liegt der Punkt $z = 0$ im Innern des Polygons und ist $Z = \Gamma$ dessen Bild, so gilt für diese Stelle die Entwicklung:

$$z = \gamma_1(Z-\Gamma) + \gamma_2(Z-\Gamma)^2 + \ldots$$

mithin auch:

$$\left\{z^n,\ Z\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{c}{Z-\Gamma} + \mathfrak{P}(Z-\Gamma). \qquad (129)$$

Soll das Innere des genannten Polygons abgebildet werden, so tritt ausser $Z = \Gamma$ und den Bildern der Ecken keine Unstetigkeitsstelle auf, sodass unter Berücksichtigung der bekannten Rolle des zu $Z = \Gamma$ konjugierten Punktes $Z = \Gamma_1$ die Funktion:

$$\Phi = \left\{z^n,\ Z\right\} - \sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma)^2}$$
$$- \frac{c}{Z-\Gamma} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma_1)^2} - \frac{c_1}{Z-\Gamma_1} \qquad (130)$$

im ganzen Gebiete $Y > 0$ holomorph und mithin konstant ist.

Die Holomorphität von Φ bleibt für $Z = \infty$ noch nachzuweisen. Hiezu setzen wir $Z = \frac{1}{t}$ und haben, wenn die Punkte $z = a$ und $t = 0$ einander entsprechen, die Entwicklung:

$$z - a = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots$$

Hieraus ergibt sich:

$$\{z^n,\ Z\} = t^2\cdot\mathfrak{P}(t) \text{ d. h.}$$
$$\{z^n,\ Z\} = 0 \text{ für } t = 0 \text{ oder } Z = \infty.$$

Leicht ist nun zu sehen, dass auch $\Phi = 0$ für $Z = \infty$, so dass $Z = \infty$ kein singulärer Punkt ist; zugleich haben wir den constanten Wert von Φ als Null gefunden, so dass innerhalb des betrachteten Gebietes die Gleichung besteht:

$$\Phi = 0.$$

Bemerkt man noch, dass $\{z^n,\ Z\} = \{z,\ Z\} - \frac{n^2-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)^2$ ist,

so ist die verlangte Abbildung vermittelt durch die Differentialgleichung:

$$\{z, Z\} - \frac{n^2-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2}+\frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma)^2}+\frac{c}{Z-\Gamma}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma_1)^2}+\frac{c_1}{Z-\Gamma_1} \tag{131}$$

Zwischen den Constanten der rechten Seite findet man durch die Transformation $Z=\frac{1}{t}$ die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a_\mu + c + c_1 = 0\\ &\Sigma A_\mu\cdot a_\mu + c\cdot\Gamma + c_1\cdot\Gamma_1 + \frac{1}{2}\cdot\Sigma(1-\alpha_\mu^2) + (1-n^2) = 0\\ &\Sigma A_\mu^2\cdot a_\mu + c\cdot\Gamma^2 + c_1\cdot\Gamma_1^2 + \Sigma(1-\alpha_\mu^2)\cdot A_\mu + (1-n^2)(\Gamma+\Gamma_1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Ist das Aeussere des oben genannten Lemniskatenpolygons abzubilden, so hat man für $z=\infty$, dessen Bild der Punkt $Z=\Gamma'$ sein soll, die Entwicklung:

$$z = \frac{\gamma_1'}{Z-\Gamma'} + \mathfrak{P}(Z-\Gamma').$$

Mithin ist an dieser Stelle:

$$\{z^n, Z\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma')^2}+\frac{c'}{Z-\Gamma'}+\mathfrak{P}(Z-\Gamma'). \tag{133}$$

Dieselben Schlüsse wie oben ergeben zur Abbildung des Aeussern die Differentialgleichung:

$$\{z, Z\} - \frac{n^2-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dZ}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{m}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha_\mu'^2}{(Z-A_\mu')^2}+\frac{a_\mu'}{Z-A_\mu'}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma')^2}+\frac{c'}{Z-\Gamma'}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^2}{(Z-\Gamma_1')^2}+\frac{c_1'}{Z-\Gamma_1'} \tag{134}$$

Zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen (132).

Die weitere Ausführung allgemeiner Fälle sei hier übergangen.

Ein besonderes Interesse bietet die Abbildung eines Polygons, dessen Grenzkurven lauter Schleifenlemniskaten $2n$ter Ordnung sind. Dies tritt ein, wenn in Gleichung (128) $\beta=0$ ist. Die Gleichung lautet alsdann:

$$z^n\cdot z_1^n + \alpha z^n + \alpha_1 z_1^n = 0. \tag{135}$$

Transformiert man $z=\frac{1}{z'}$, so geht jede Schleifenlemniskate in

eine reguläre Hyperbel $n$ter Ordnung über. Die Abbildung des Innern eines von Schleifenlemniskaten $2n$ter Ordnung begrenzten Polygons der z Ebene führt somit auf die Abbildung des Aeussern eines Hyperbelpolygons $n$ter Ordnung der z' Ebene und die Abbildung des Aeussern eines derartigen Lemniskatenpolygons auf die Abbildung des Innern eines Hyperbelpolygons. Die Abbildungen können nach § 1, II. Abschnitt sofort ausgeführt werden.

Für ein reguläres von m Schleifenlemniskaten $2n^{\text{ter}}$ Ordnung begrenztes Flächenstück findet man insbesondere

a) Abbildung des Innern:

$$\frac{1}{z^n} = C \cdot \int_0^{\zeta^n} \frac{(1-s^m)^{\frac{2}{m}}}{s^2} \cdot ds + C' \tag{136}$$

b) Abbildung des Aeussern:

$$\frac{1}{z^n} = C \cdot \int_0^{\zeta^n} \frac{ds}{(1-s^m)^{\frac{2}{m}}} + C' \tag{137}$$

Die letzte Abbildung haben wir für $m = 4$, $n = 2$, $C = 1$, $C' = 0$ durchgeführt. Die Abbildung ist in diesem Falle

$$\zeta^2 = \sin \operatorname{am} \frac{1}{z^2};\ \text{mod}\sqrt{-1}\ .$$

Die Begrenzung besteht aus vier sich rechtwinklig durchsetzenden Bernoulli'schen Lemniskaten. Die entsprechenden Werte von ζ und z gibt Tabelle V; die hieraus konstruierten Figuren zeigt Tafel III Fig. 1.

§ 4.

Abbildung eines von cardioidischen Kurven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung begrenzten Flächenstückes.

Setzt man in Gleichung (5) $\varphi(z) = z^{\frac{1}{n}}$, so erhält man die Gleichung einer cardioidischen Kurve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Symmetralachse durch den Nullpunkt geht:

$$z^{\frac{1}{n}} \cdot z_1^{\frac{1}{n}} + \alpha z^{\frac{1}{n}} + \alpha_1 z_1^{\frac{1}{n}} + \beta = 0 \tag{138}$$

Für $\beta = 0$ ergeben sich Kurven, welche mit Paskal'schen Schneckenlinien Aehnlichkeit haben; ist $\alpha = A(1+i)$, so haben wir für $n = 2$ die Gleichung der Cardioide, weshalb wir im entsprechenden allgemeinen Fall von Cardioiden $2n^{\text{ter}}$ Ordnung sprechen.

Das Polygon habe m Ecken erster Art, der Punkt $z = 0$ sei im Innern.

Nach Gleichung (7) ist, da die dort für die Art der Funktion $\varphi(z)$ aufgestellte Bedingung erfüllt ist, die Funktion

$$\left\{z^{\frac{1}{n}}, Z\right\} - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right\}$$

längs der ganzen Begrenzung mit Einschluss der Ecken (resp. deren Bildern) stetig und eindeutig. Unstetigkeiten bringen nur die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ hervor.

Ist das Innere des genannten Polygons abzubilden, so hat für $z = 0$, wenn $Z = \Gamma$ dessen Bild ist, die Entwicklung statt:

$$z = \gamma_1 (Z-\Gamma) + \gamma_2 (Z-\Gamma)^2 + \ldots.$$

Mithin ist an dieser Stelle:

$$\left\{z^{\frac{1}{n}}, Z\right\} = \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{c}{Z-\Gamma} + \mathfrak{P}(Z-\Gamma) \qquad (139)$$

Da $Z = \Gamma_1$ (wenn Γ und Γ_1 konjugiert sind) aus bekannten Gründen in gleicher Weise wie $Z = \Gamma$ als singuläre Stelle auftritt, so ist die Funktion

$$\Phi \equiv \left\{z^{\frac{1}{n}}, Z\right\} - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{Z-A_\mu}\right\} - \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma)^2} - \frac{c}{Z-\Gamma} - \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma_1)^2} - \frac{c_1}{Z-\Gamma_1} \qquad (140)$$

im ganzen betrachteten Gebiet holomorph.

Zum Beweis der Holomorphität der Funktion Φ an der Stelle $Z = \infty$ setzen wir $Z = \frac{1}{t}$ und finden $\{z^{\frac{1}{n}}, Z\} = t^2 \cdot \mathfrak{P}(t)$ für $t = 0$.

Hieraus ergibt sich sofort

$$\Phi = 0 \text{ für } t = 0 \text{ oder auch } Z = \infty.$$

Da Φ im betrachteten Gebiete constant ist, so gilt für dies Gebiet die Gleichung

$$\Phi = 0.$$

Die Abbildung des Innern des betrachteten Polygons ist also, da

$$\{z^{\frac{1}{n}}, Z\} = \{z, Z\} + \frac{n^2-1}{2n^2} \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)^2$$

ist, vermittelt durch die Differentialgleichung:

$$\{z, Z\} + \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha_\mu^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{\alpha_\mu}{Z-A_\mu} \right\}$$
$$+ \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{c}{Z-\Gamma} + \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma_1)^2} + \frac{c_1}{Z-\Gamma_1} \quad (141)$$

Zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a_\mu + c + c_1 = 0 \\ &\Sigma A_\mu \cdot a_\mu + c \cdot \Gamma + c_1 \cdot \Gamma_1 + \frac{1}{2} \Sigma (1 - \alpha_\mu^2) + \frac{n^2-1}{n^2} = 0 \\ &\Sigma A_\mu^2 \cdot a_\mu + \Gamma^2 \cdot c + \Gamma_1^2 \cdot c_1 + \Sigma (1-\alpha_\mu^2) \cdot A_\mu + \frac{n^2-1}{n^2} (\Gamma + \Gamma_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (142)$$

Zur Abbildung des Aeussern eines Polygons cardioidischer Kurven ergibt sich durch ganz dieselben Schlüsse, wenn $Z = \Gamma'$ das Bild des Punktes $z = \infty$ ist, die Differentialgleichung:

$$\{z, Z\} + \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dZ}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha_\mu'^2}{(Z-A_\mu')^2} + \frac{\alpha_\mu'}{Z-A_\mu'} \right\}$$
$$+ \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma')^2} + \frac{c'}{Z-\Gamma'} + \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{1}{(Z-\Gamma_1')^2} + \frac{c_1'}{Z-\Gamma_1} \quad (143)$$

Zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen (142).

Von besonderem Interesse sind jene Fälle, in denen in Gleichung (138) $\beta = 0$ ist, die Grenzkurven also Schneckenlinien oder Cardioiden $2n$ter Ordnung sind. Setzt man $z = \frac{1}{z'}$, so geht jede Grenzkurve in eine Parabel $n$ter Ordnung der z' Ebene über, so dass die Abbildung des Innern des betrachteten Polygons auf die Abbildung des Aeussern eines Parabelpolygons und die Abbildung des Aeussern des genannten Polygons auf die Abbildung des Innern eines Parabelpolygons zurückgeführt ist. Die Abbildungen können nach § 2, II. Abschnitt ausgeführt werden.

Ist ein reguläres Polygon gegeben, welches von m Schneckenlinien oder Cardioiden $2n$ter Ordnung gebildet wird, so ergibt sich zur Abbildung des Innern die Transformation:

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{n}}} = C \cdot \int_0^{\zeta^{\frac{1}{n}}} \frac{(1 - s^{mn})^{\frac{2}{mn}}}{s^2} \cdot ds + C' \quad (144)$$

und zur Abbildung des Aeussern:

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{n}}} = C \cdot \int_0^{\zeta^{\frac{1}{n}}} \frac{ds}{(1 - s^{mn})^{\frac{2}{mn}}} + C' \tag{145}$$

Im ersteren Falle sind $\zeta = 0$ und $z = 0$, im letzteren $\zeta = 0$ und $z = \infty$ entsprechende Punkte.

Die Abbildung (145) haben wir für $m = n = 2$, $C = 1$, $C' = 0$ numerisch und konstruktiv durchgeführt. Die Abbildung ist in diesem Falle:

$$\zeta^{\frac{1}{2}} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right); \ \operatorname{mod} \sqrt{-1}.$$

Die entsprechenden Werte von ζ und z finden sich in Tabelle VI, die hieraus konstruierten Figuren zeigt Tafel III Fig. 2.

Tabellen

entsprechender Werte von z und ζ einiger Abbildungen.

I.

Entsprechende Werte von $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ der Abbildung:

$$\zeta^2 = \operatorname{sin\,am}\, z^2 \pmod{\sqrt{-1};\ K = 1{,}3110}$$

zur Bestimmung derjenigen Schnittpunkte eines Systems von Orthogonalkurven beider Ebenen, welche im ersten Viertelsquadranten innerhalb und am Rande der hiedurch conform aufeinander abgebildeten Flächenstücke liegen. Vergl. Taf. II, Fig. 1.

$\frac{x}{\sqrt{K}}$	$\frac{y}{\sqrt{K}}$	ξ	η	$\frac{x}{\sqrt{K}}$	$\frac{y}{\sqrt{K}}$	ξ	η
A.				C.			
0	0	0	0	0,4913	0,2035	0,562	0,231
0,3162	0	0,362	0	0,5748	0,1740	0,659	0,191
0,4472	0	0,512	0	0,6508	0,1536	0,748	0,172
0,5477	0	0,626	0	0,7206	0,1388	0,826	0,149
0,6326	0	0,721	0	0,7850	0,1274	0,896	0,125
0,7071	0	0,802	0	0,8449	0,1183	0,953	0,098
0,7746	0	0,870	0	0,9013	0,1109	0,998	0,068
0,8367	0	0,925	0				
0,8944	0	0,966	0	D.			
0,9487	0	0,991	0	0,6018	0,2493	0,692	0,287
1	0	1	0	0,6708	0,2236	0,775	0,254
B.				0,7359	0,2038	0,854	0,224
0,3474	0,1439	0,397	0,165	0,7971	0,1882	0,926	0,189
0,4602	0,1086	0,527	0,124	0,8549	0,1755	0,988	0,152
0,5551	0,0901	0,636	0,102	E.			
0,6373	0,0784	0,728	0,087	0,6949	0,2913	0,808	0,335
0,7106	0,0704	0,808	0,071	0,7551	0,2649	0,888	0,301
0,7772	0,0643	0,877	0,062	0,8128	0,2461	0,965	0,261
0,8388	0,0596	0,927	0,049	F.			
0,8961	0,0558	0,974	0,034				
0,9501	0,0526	0,999	0,016	0,7769	0,3218	0,924	0,383

II.

Entsprechende Werte von $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ der Abbildung:

$$\zeta = \text{sin am } (z^2 + 2iK) \text{ (mod } \sqrt{-1};\ K = 1{,}3110)$$

zur Bestimmung der Schnittpunkte eines Systems von Orthogonalkurven beider Ebenen mit dem Rande der hiedurch conform aufeinander abgebildeten Flächenstücke. Die Quadranten beziehen sich auf die ζEbene. Vergl. Taf. II. Fig. 2.

$\frac{x}{\sqrt{K}}$	$\frac{y}{\sqrt{K}}$	ξ	η	$\frac{x}{\sqrt{K}}$	$\frac{y}{\sqrt{K}}$	ξ	η
I. Quadrant.				III. Quadrant.			
1,272	0,786	1	0	0,786	1,272	−1	0
1,262	0,832	0,9994	0,0344	0,775	1,225	−0,9994	−0,0344
1,253	0,878	0,9906	0,1367	0,765	1,176	−0,9906	−0,1367
1,246	0,923	0,9537	0,3008	0,754	1,126	−0,9537	−0,3008
1,239	0,968	0,8633	0,5047	0,745	1,074	−0,8633	−0,5047
1,235	1,012	0,7071	0,7071	0,735	1,020	−0,7071	−0,7071
1,231	1,056	0,5047	0,8633	0,727	0,963	−0,5047	−0,8633
1,228	1,099	0,3008	0,9537	0,719	0,904	−0,3008	−0,9537
1,226	1,142	0,1367	0,9906	0,713	0,842	−0,1367	−0,9906
1,225	1,184	0,0344	0,9994	0,708	0,776	−0,0344	−0,9994
II. Quadrant.				IV. Quadrant.			
1,225	1,225	0	1	0,707	0,707	0	−1
1,184	1,225	−0,0344	0,9994	0,776	0,708	0,0344	−0,9994
1,142	1,226	−0,1367	0,9906	0,842	0,713	0,1367	−0,9906
1,099	1,228	−0,3008	0,9537	0,904	0,719	0,3008	−0,9537
1,056	1,231	−0,5047	0,8633	0,963	0,727	0,5047	−0,8633
1,012	1,235	−0,7071	0,7071	1,020	0,735	0,7071	−0,7071
0,968	1,239	−0,8633	0,5047	1,074	0,745	0,8633	−0,5047
0,923	1,246	−0,9537	0,3008	1,126	0,754	0,9537	−0,3008
0,878	1,253	−0,9906	0,1367	1,176	0,765	0,9906	−0,1367
0,832	1,262	−0,9994	0,0344	1,225	0,775	0,9994	−0,0344

$$x = y = \sqrt{K};\ \xi = \eta = 0.$$

III.

Entsprechende Werte von $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ der Abbildung:

$$\zeta = \operatorname{sin\,am}\,(z^2 + iK) \pmod{\sqrt{-1};\ K = 1{,}3110}$$

zur Bestimmung der Schnittpunkte eines Systems von Orthogonalkurven beider Ebenen mit dem Rande der hierdurch conform aufeinander abgebildeten Flächenstücke. Die Quadranten beziehen sich auf die ζ-Ebene. Vergleiche Taf. II, Fig. 3.

$\frac{x}{\sqrt{K}}$	$\frac{y}{\sqrt{K}}$	ξ	η	$\frac{x}{\sqrt{K}}$	$\frac{y}{\sqrt{K}}$	ξ	η
I. Quadrant.				**III. Quadrant.**			
1,099	0,455	1	0	0,455	1,099	—1	0
1,078	0,520	0,9994	0,0344	0,432	1,042	—0,9994	—0,0344
1,059	0,567	0,9906	0,1367	0,407	0,983	—0,9906	—0,1367
1,043	0,623	0,9537	0,3008	0,381	0,919	—0,9537	—0,3008
1,030	0,679	0,8633	0,5047	0,352	0,851	—0,8633	—0,5047
1,020	0,735	0,7071	0,7071	0,322	0,777	—0,7071	—0,7071
1,012	0,790	0,5047	0,8633	0,288	0,695	—0,5047	—0,8633
1,006	0,845	0,3008	0,9537	0,249	0,602	—0,3008	—0,9537
1,003	0,898	0,1367	0,9906	0,203	0,491	—0,1367	—0,9906
1,001	0,949	0,0344	0,9994	0,144	0,348	—0,0344	—0,9994
II. Quadrant.				**IV. Quadrant.**			
1	1	0	1	0	0	0	—1
0,949	1,001	—0,0344	0,9994	0,348	0,144	0,0344	—0,9994
0,898	1,003	—0,1367	0,9906	0,491	0,203	0,1367	—0,9906
0,845	1,006	—0,3008	0,9537	0,602	0,249	0,3008	—0,9537
0,790	1,012	—0,5047	0,8633	0,695	0,288	0,5047	—0,8633
0,735	1,020	—0,7071	0,7071	0,777	0,322	0,7071	—0,7071
0,679	1,030	—0,8633	0,5047	0,851	0,352	0,8633	—0,5047
0,623	1,043	—0,9537	0,3008	0,919	0,381	0,9537	—0,3008
0,567	1,059	—0,9906	0,1367	0,982	0,407	0,9906	—0,1367
0,520	1,078	—0,9994	0,0344	1,042	0,432	0,9994	—0,0344

$x = y = 0{,}707 \cdot \sqrt{K};\ \xi = \eta = 0.$

IV.

Entsprechende Werte von $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ der Abbildung:

$$\zeta^{\frac{1}{2}} = \sin \operatorname{am} z^{\frac{1}{2}} \pmod{\sqrt{-1};\ K = 1{,}3110}$$

zur Bestimmung derjenigen Schnittpunkte eines Systems von Orthogonalkurven, welche im ersten Quadranten innerhalb und am Rande der hiedurch conform aufeinander abgebildeten Flächenstücke liegen. Vergl. Taf. II, Fig. 4.

$\frac{x}{K^2}$	$\frac{y}{K^2}$	ξ	η	$\frac{x}{K^2}$	$\frac{y}{K^2}$	ξ	η
		A.				C.	
0	0	0	0	0	0,08	0	0,1368
0,01	0	0,0172	0	0,05	0,12	0,0881	0,2071
0,04	0	0,0688	0	0,12	0,16	0,2138	0,2721
0,09	0	0,1540	0	0,21	0,20	0,3764	0,3245
0,16	0	0,2709	0	0,34	0,24	0,5688	0,3516
0,25	0	0,4022	0	0,45	0,28	0,7737	0,3377
0,36	0	0,5736	0	0,60	0,32	0,9626	0,2708
0,49	0	0,7332	0				
0,64	0	0,8704	0			D.	
0,81	0	0,9663	0	0	0,18	0	0,3154
1	0	1	0	0,07	0,24	0,1326	0,4230
		B.		0,16	0,30	0,3158	0,5182
				0,27	0,36	0,5506	0,5787
0	0,02	0	0,0344	0,40	0,42	0,8191	0,5737
0,03	0,04	0,0517	0,0687				
0,08	0,06	0,1379	0,1022			E.	
0,15	0,08	0,2572	0,1326	0	0,32	0	0,5847
0,24	0,10	0,4068	0,1558	0,09	0,40	0,2022	0,7447
0,35	0,12	0,5633	0,1658	0,20	0,48	0,4906	0,8714
0,48	0,14	0,7437	0,1566				
0,63	0,16	0,8937	0,1238			F.	
0,80	0,18	0,9975	0,0688	0	0,50	0	1

V.

Entsprechende Werte von $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ der Abbildung:

$$\zeta^2 = \sin \operatorname{am} z^{-2} \pmod{\sqrt{-1};\ K = 1{,}3110}$$

zur Bestimmung derjenigen Schnittpunkte eines Systems von Orthogonalkurven, welche im ersten Viertelsquadranten innerhalb und am Rande der hiedurch conform aufeinander abgebildeten Flächenstücke liegen. Vergl. Taf. III, Fig. 1.

$x \cdot \sqrt{K}$	$y \cdot \sqrt{K}$	ξ	η	$x \cdot \sqrt{K}$	$y \cdot \sqrt{K}$	ξ	η
	A.				C.		
∞	0	0	0	1,740	0,719	0,562	0,231
3,162	0	0,362	0	1,594	0,483	0,659	0,191
2,236	0	0,512	0	1,455	0,343	0,748	0,172
1,826	0	0,626	0	1,338	0,257	0,826	0,149
1,581	0	0,721	0	1,241	0,201	0,896	0,125
1,414	0	0,802	0	1,161	0,163	0,953	0,098
1,291	0	0,870	0	1,093	0,133	0,998	0,068
1,195	0	0,925	0				
1,118	0	0,966	0		D.		
1,054	0	0,991	0	1,415	0,588	0,692	0,287
1	0	1	0	1,342	0,447	0,775	0,254
				1,262	0,349	0,854	0,224
	B.			1,188	0,281	0,926	0,189
2,436	1,018	0,397	0,165	1,122	0,229	0,988	0,152
2,058	0,486	0,527	0,124				
1,755	0,285	0,636	0,102		E.		
1,546	0,162	0,728	0,087	1,228	0,509	0,808	0,335
1,394	0,138	0,808	0,071	1,179	0,414	0,888	0,301
1,278	0,105	0,877	0,062	1,127	0,341	0,965	0,261
1,186	0,084	0,927	0,049				
1,112	0,069	0,974	0,034		F.		
1,049	0,058	0,999	0,016	1,099	0,455	0,924	0,383

VI.

Entsprechende Werte von $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ der Abbildung:

$$\zeta^{\frac{1}{2}} = \sin \operatorname{am} z^{-\frac{1}{2}} \pmod{\sqrt{-1};\ K = 1{,}3110}$$

zur Bestimmung derjenigen Schnittpunkte eines Systems von Orthogonalkurven, welche im ersten Quadranten innerhalb und am Rande der hiedurch conform aufeinander abgebildeten Flächenstücke liegen. Vergl. Taf. III, Fig. 2.

$x \cdot K^2$	$y \cdot K^2$	ξ	η
	A.		
∞	0	0	0
100	0	0,0172	0
25	0	0,0688	0
11,222	0	0,1540	0
6,250	0	0,2709	0
4	0	0,4022	0
2,778	0	0,5736	0
2,0408	0	0,7332	0
1,5625	0	0,8704	0
1,2345	0	0,9663	0
1	0	1	0
	B.		
0	—50	0	0,0344
12	—16	0,0517	0,0687
8	—6	0,1379	0,1022
5,190	—2,768	0,2572	0,1326
3,550	—1,479	0,4068	0,1558
2,557	—0,877	0,5633	0,1658
1,920	—0,560	0,7437	0,1566
1,491	—0,378	0,8937	0,1238
1,189	—0,267	0,9975	0,0688
	C.		
0	—12,500	0	0,1368
3,077	—7,101	0,0881	0,2071
3,000	—4,000	0,2138	0,2721
2,497	—2,378	0,3764	0,3245
2,000	—1,500	0,5688	0,3516
1,602	—0,996	0,7737	0,3377
1,209	—0,692	0,9626	0,2708
	D.		
0	—5,555	0	0,3154
1,120	—3,840	0,1326	0,4230
1,389	—2,595	0,3158	0,5182
1,333	—1,778	0,5506	0,5787
1,189	—1,249	0,8191	0,5737
	E.		
0	—3,125	0	0,5847
0,536	—2,380	0,2022	0,7447
0,739	—1,775	0,4906	0,8714
	F.		
0	—2	0	1

VITA.

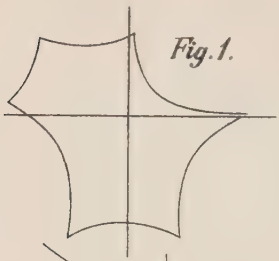
Ich wurde am 12. Februar 1873 zu Haimhausen, kgl. Bezirksamts Dachau, geboren. In den Jahren 1884—1893 besuchte ich die erzbischöfl. Lateinschule in Scheyern, das kgl. Gymnasium in Freising und das kgl. Ludwigsgymnasium in München, an welch letzterem ich absolvierte. Seither oblag ich an der kgl. Universität München dem Studium der Mathematik, der theoretischen und praktischen Physik, sowie der Astronomie; auch versäumte ich nicht, durch Besuch von Vorlesungen allgemeinen Inhaltes mir allgemeine Kenntnisse anzueignen.

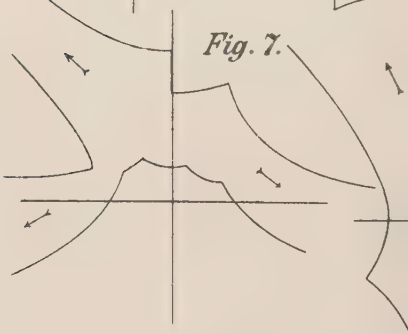
Die II. Sektion der hohen philosophischen Fakultät der hiesigen Universität stellte am 27. Juni 1895 die Preisaufgabe: „Ein von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt begrenztes Flächenstück ist conform auf den Einheitskreis abzubilden; einfache Fälle sind vollständig durchzuführen.“ Meiner diesbezüglichen Arbeit wurde am 27. Juni 1896, am Stiftungsfeste der Universität, der Preis zuerkannt.

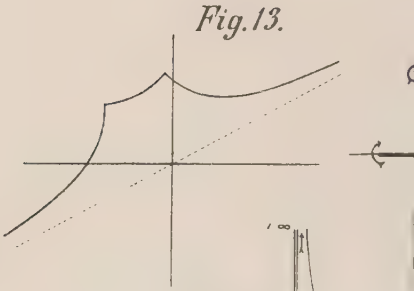
Meine sehr geschätzten Lehrer waren die Herren Dr. Gustav Bauer und Dr. Ferdinand Lindemann. Ihnen möchte ich an dieser Stelle für die liebevolle Förderung meiner Studien den herzlichsten Dank aussprechen.

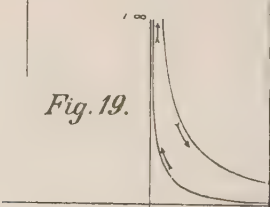
Johann Goettler.

J. Goettler, Conforme Abbildung









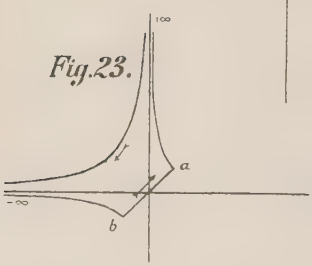


Fig. 3.

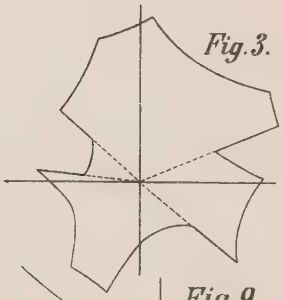


Fig. 4.

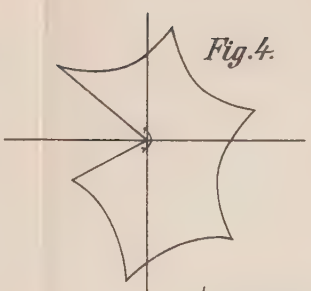


Fig. 5.

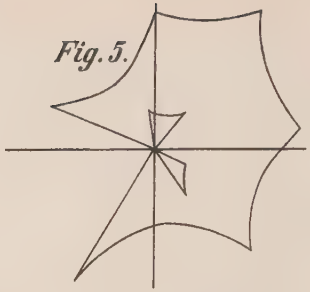


Fig. 6.

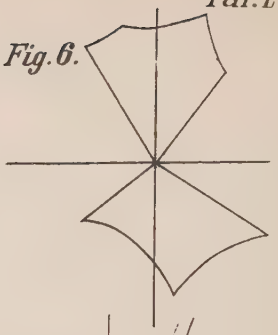


Fig. 8.

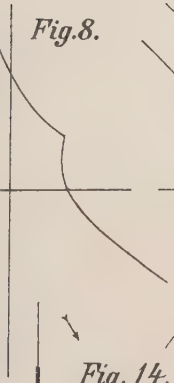


Fig. 9.

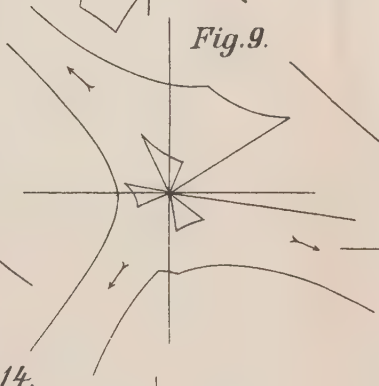


Fig. 10.

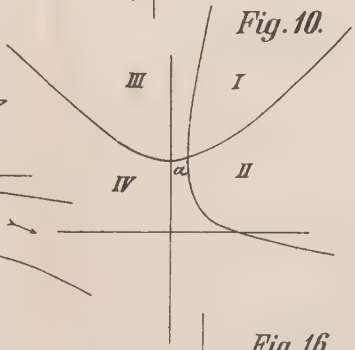


Fig. 11.

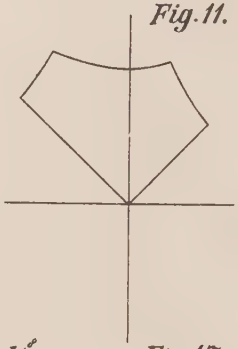


Fig. 12.

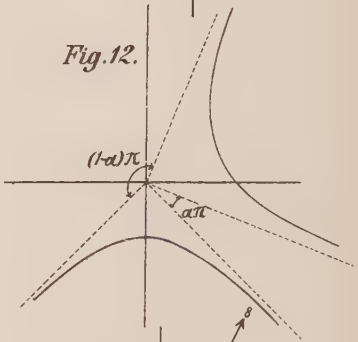


Fig. 14.

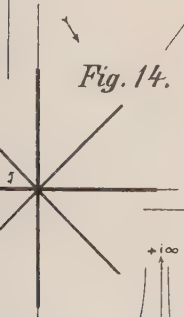


Fig. 15.

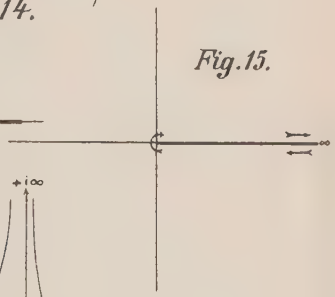


Fig. 16.

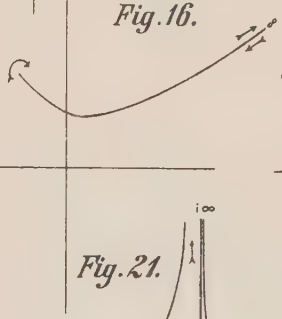


Fig. 17.

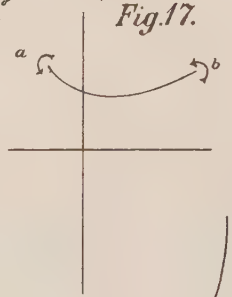


Fig. 18.

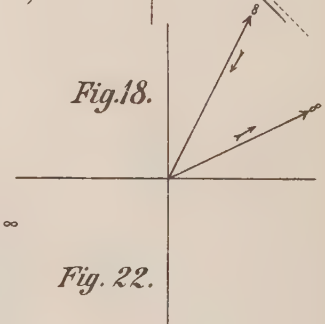


Fig. 20.

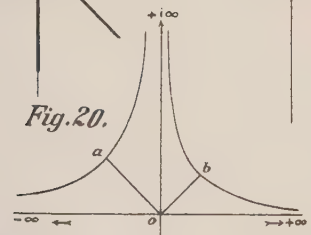


Fig. 21.

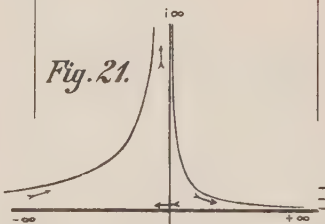


Fig. 22.

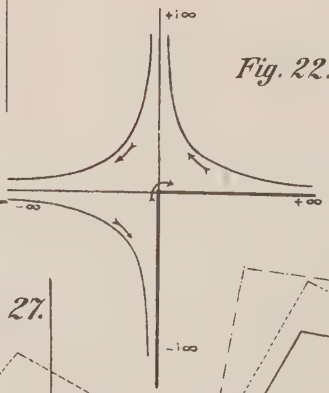


Fig. 25.

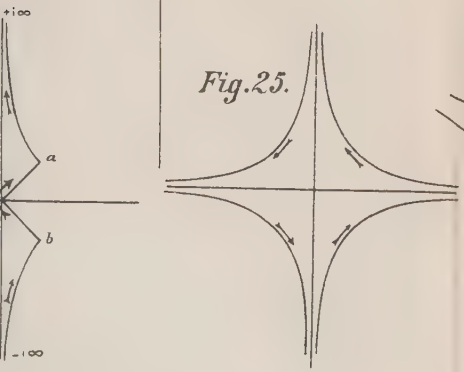


Fig. 26.

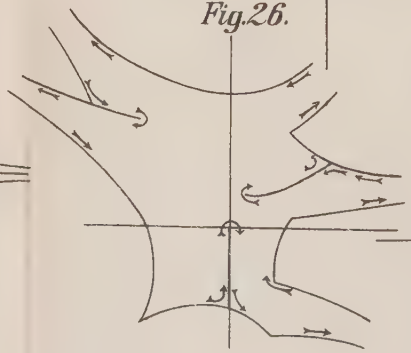


Fig. 27.

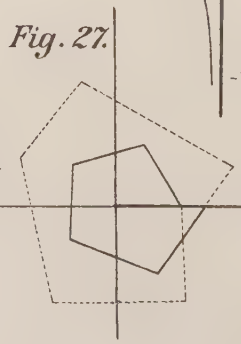
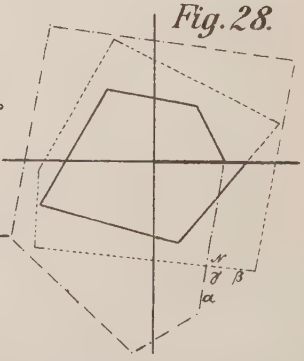
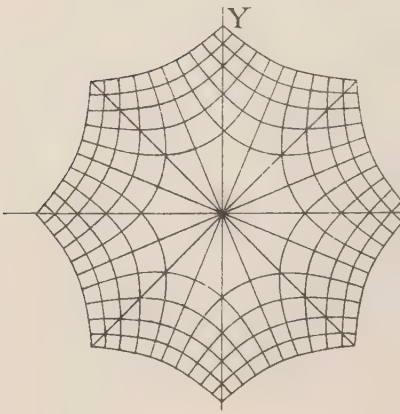


Fig. 28.



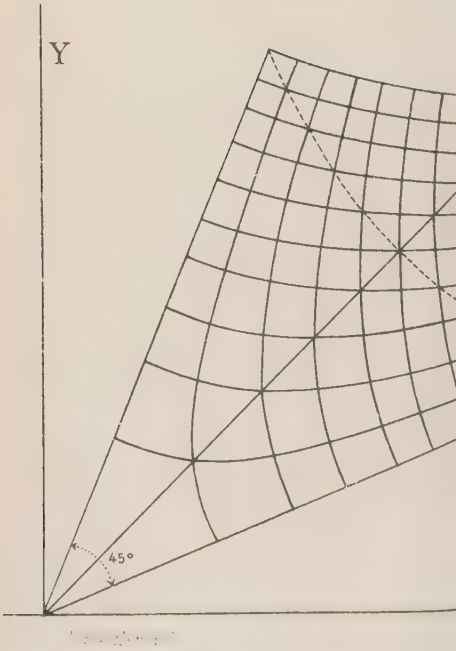
Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.

Abbildung : ξ^2



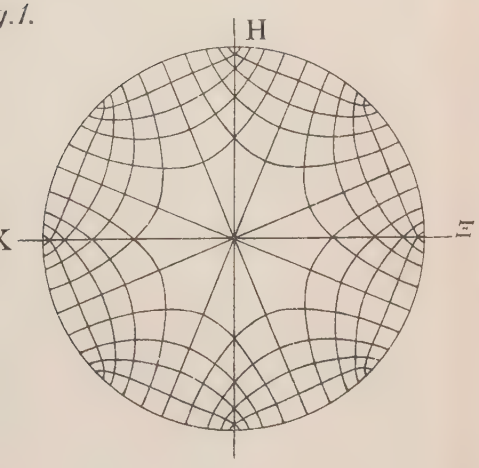
z Ebene

Abbildung : $\xi = si$



am z^2, mod $\sqrt{-1}$.

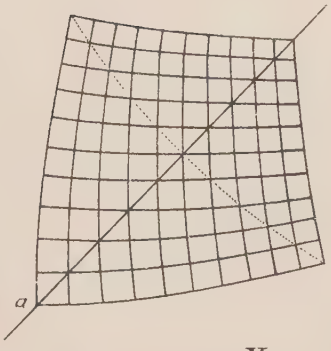
g. 1.



ζ Ebene

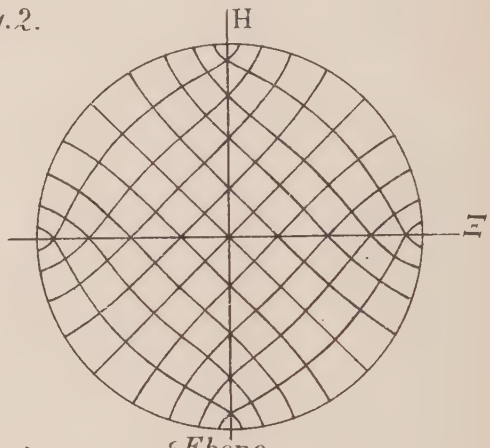
Abbildung: $\xi = \sin am\ (z^2 + 2iK)$, mod $\sqrt{-1}$.

Fig. 2.



$a = 0{,}707\sqrt{K}(1+i)$

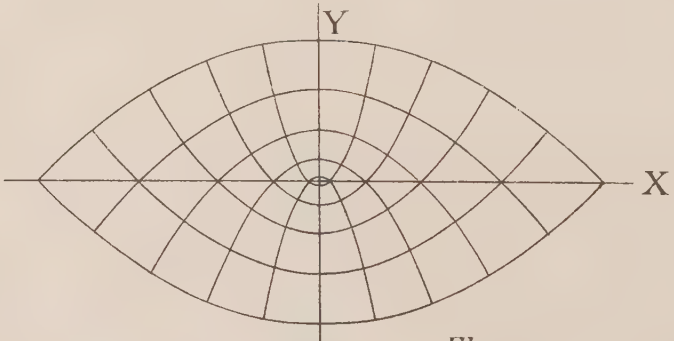
z Ebene



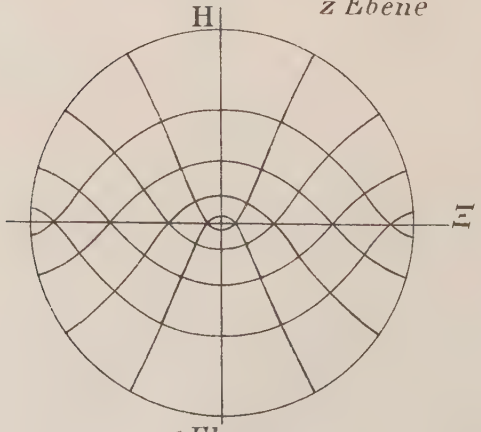
ζ Ebene

Fig. 4.

Abbildung: $\xi^{\frac{1}{2}} = \sin am\ z^{\frac{1}{2}}$, mod $\sqrt{-1}$.



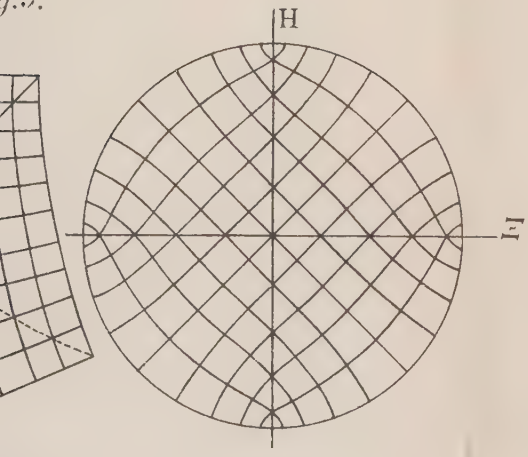
z Ebene



ζ Ebene

$(z^2 + iK)$, mod $\sqrt{-1}$.

g. 3.



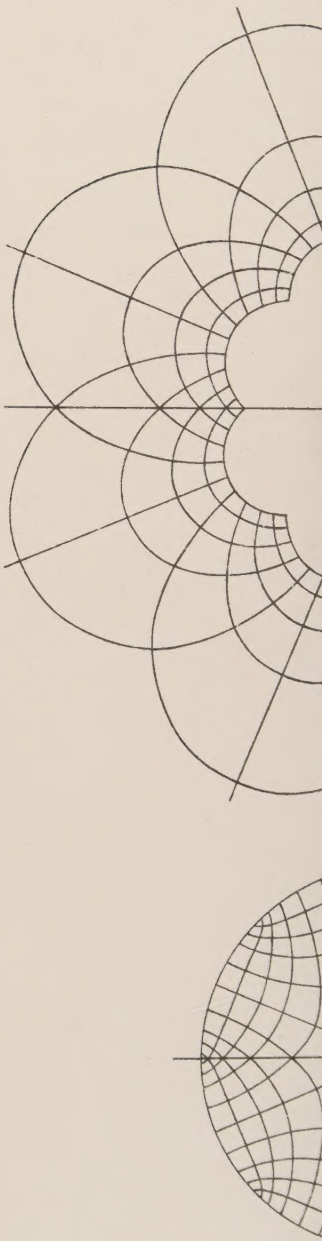
bene

ζ Ebene

X

Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.

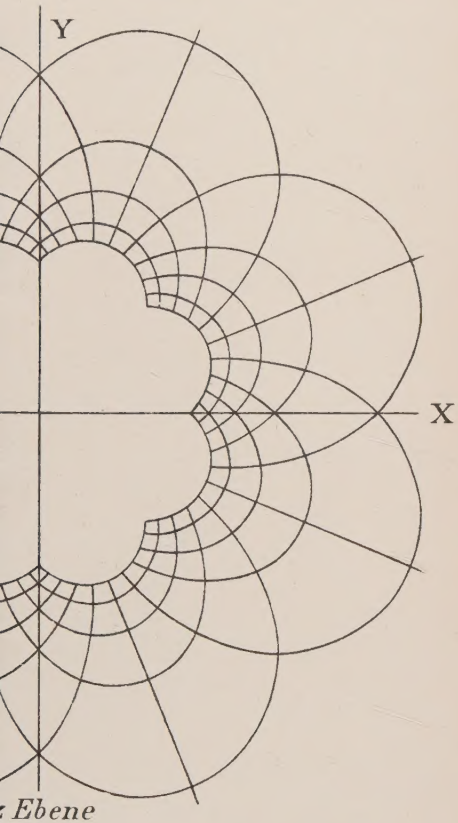
J. Goettler, Conforme Abbildun
Abbild



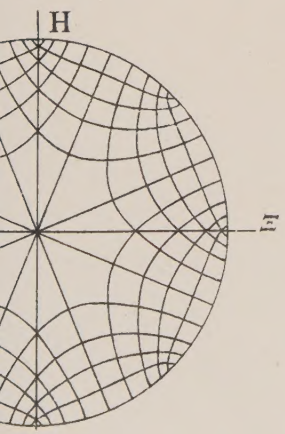
J. Goettler del.

Abbildung: $\zeta = z^2 = \sin am \frac{1}{z^2}$.

Fig. 1.



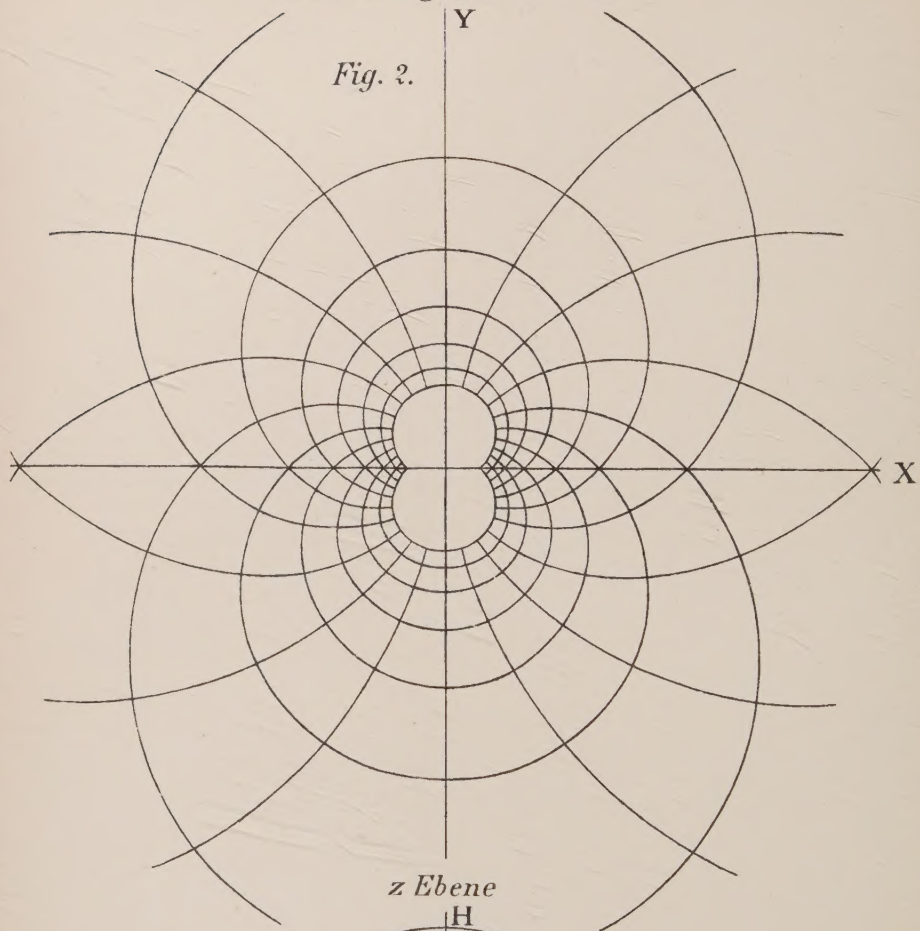
z Ebene



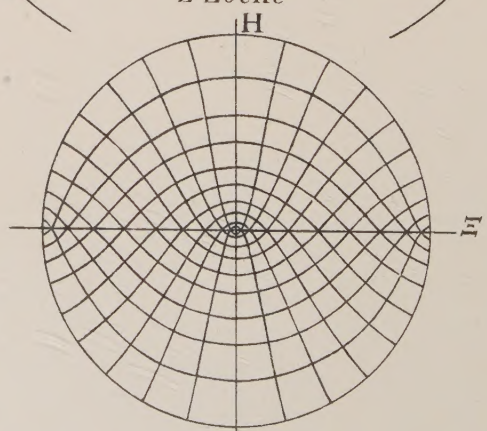
ζ Ebene

Abbildung: $\zeta = z^{\frac{1}{2}} = \sin am \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}$.

Fig. 2.



z Ebene



ζ Ebene

Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.